

Divisão Euclidiana: um olhar para o resto

Janete Jacinta Carrer Soppelsa¹

GDn°2 – Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental

Este trabalho estuda a possibilidade de se aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a evidenciar a relevância e o significado para o resto. Oferece algumas considerações sobre a divisão, além de uma análise de alguns livros didáticos, dissertações de mestrado e tese de doutorado sobre o tema. Se refere a uma proposta didática baseada nos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e nos Cenários para Investigação, de Ole Skovsmose. Essa proposta foi implementada e validada em uma turma do 7º Ano de uma escola municipal de Garibaldi, RS. A análise dos registros coletados e dos diálogos estabelecidos mostra que a sequência didática foi bem sucedida tanto nos avanços logrados pelos alunos na compreensão dos conteúdos, quanto no engajamento com a proposta, levantamento de hipóteses, elaboração de conclusões e justificativas.

Palavras-chave Divisão Euclidiana, Resto, Registros de Representação Semiótica, Cenários para Investigação.

Introdução

Como professora da rede pública municipal constato que muitos alunos têm dificuldades para compreender vários conceitos matemáticos. Eles aprendem a realizar as operações matemáticas, mas fazem esse procedimento de forma mecânica, isto é, aprendem o algoritmo, mas não compreendem os conceitos envolvidos e conseqüentemente não conseguem estabelecer uma relação entre os conteúdos matemáticos e o mundo real. Percebo ainda que a revisão dos conteúdos básicos, no início de cada ano, não traz nenhum resultado adicional e torna-se repetitiva para o aluno.

Conforme Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício onde o professor explica o conteúdo e em seguida os alunos resolvem uma sequência de exercícios. A fim de consolidar o aprendizado, seguem-se algumas atividades de aplicação. Os mesmos procedimentos se repetem na organização dos livros didáticos. Assim os alunos aprendem a realizar as operações matemáticas e o fazem

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e-mail: jsopelsa@gmail.com, orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Luisa Rodriguez Doering.

de forma mecânica, isto é, aprendem o algoritmo, mas não compreendem os conceitos envolvidos e conseqüentemente não conseguem estabelecer relação entre os conteúdos matemáticos e o mundo real.

Quando abordamos os números naturais, sabemos que o emprego de um algoritmo é uma estratégia para chegar à solução de alguns problemas, mas o que observamos é que não há uma compreensão dos alunos acerca dos conceitos envolvidos; o que também é destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante no currículo do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final dessa fase de formação, com um conhecimento insuficiente sobre como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. (BRASIL, 1998, p. 95)

Em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental o significado do resto de uma divisão Euclidiana tem sido apenas o de sobra sem ser dada uma importância maior ou haver uma exploração mais detalhada de seu uso. Além disso, a maioria dos exercícios propostos são apenas de cálculos ou abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente de uma divisão.

Por outro lado, é muito comum encontrar questões nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que envolvem situações cíclicas, isto é, situações que, a partir de um dado momento, voltam a se repetir. A solução para essas questões, em geral, pode ser encontrada através do resto da divisão Euclidiana de um número que caracteriza a situação cíclica analisada. Situações assim encaradas são de fácil entendimento e pensamos que se tornam uma boa situação-problema para mostrar a importância do resto da divisão no ensino básico. Assim, explorando mais o significado do resto de uma divisão Euclidiana, podemos, por exemplo, dado um evento cíclico, prever o que acontecerá em um determinado momento futuro.

Seria natural então nos perguntarmos:

É possível aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a enfatizar-se também o resto, percebendo-o como solução de alguns eventos cíclicos?

Para isto, propomos, na revisão de divisão com resto dos números naturais, uma abordagem mais abrangente com relação à forma apresentada em alguns livros didáticos, objetivando compreender melhor o significado dessa operação, principalmente no que diz

respeito ao quociente e ao resto, observando a viabilidade de aprofundar o significado da divisão e sua interligação natural com alguns problemas cíclicos.

Apesar de não encontrarmos esse tipo de problema no material didático usual, acreditamos que esse estudo pode possibilitar a exploração do algoritmo da divisão dentro de uma proposta diferenciada em que os alunos possam efetivamente associar o resto da divisão a situações do seu cotidiano.

Apoiados em Duval (2003), aplicamos uma sequência didática que buscou possibilitar que os alunos avançassem um pouco mais na compreensão e na representação do resto de uma divisão não exata de dois números naturais. Para que a apreensão dos objetos matemáticos seja significativa, Duval (2003) propõe a mobilização de, ao menos, dois Registros de Representação de um mesmo objeto matemático por parte do educando e, considerando a divisão não exata de números naturais, o que era considerado apenas uma “sobra” pode ser tratado conferindo-se mais significado à operação de divisão, além do que, o conteúdo de uma representação depende mais do seu registro do que do objeto representado, pois passar de um registro para o outro não é somente mudar o modo de tratamento, é entender os diferentes aspectos de um mesmo objeto.

O que se espera é que o aluno, ao ler determinada situação-problema, vislumbre que é o resto da divisão o resultado procurado. Em outras palavras, que aquele resultado tenha significado para ele e não seja apenas um mero número que é a sobra do resultado de uma divisão.

O que é a chamada divisão Euclidiana?

Mesmo quando um número natural a não é múltiplo de um número natural $b \neq 0$, Euclides, no seus *Elementos*, utiliza, sem enunciar explicitamente, o fato que é sempre possível efetuar a divisão de a por b , com resto. Esse resultado, que pode ser demonstrado por indução², ou, equivalentemente, pelo Princípio da Boa Ordenação³, não só é um importante instrumento na obra de Euclides, como também é um resultado central em

² O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de proposições referentes aos números naturais.

³ Princípio da Boa Ordenação diz que todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento.

Aritmética e no Ensino Básico. Enunciamos, sem demonstrar, e comentamos alguns aspectos desse teorema.

Teorema da Divisão Euclidiana: Sejam a e b números naturais com $b \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $a = b \cdot q + r$, onde $0 \leq r < b$.

Esse resultado garante que mesmo quando a não é múltiplo de b , podemos encontrar o múltiplo de b que fica “mais perto” de a .

Note que a restrição para o resto ($0 \leq r < b$) garante o “maior” quociente possível: se $0 \leq r < b$, somando $b \cdot q$ nessa desigualdade obtemos $b \cdot q \leq b \cdot q + r < b \cdot q + b$. Substituindo $a = b \cdot q + r$ e $b \cdot q + b = b \cdot (q + 1)$ a desigualdade anterior se torna $b \cdot q \leq a < b \cdot (q + 1)$, o que indica que se $0 \leq r < b$, então o quociente q é o maior possível, pois multiplicando $q + 1$ por b já ultrapassa a . Também vale a recíproca, ou seja, se q é o maior quociente possível, ou seja, se $b \cdot (q + 1)$ ultrapassa a , teremos a restrição do resto: se $b \cdot q \leq a < b \cdot (q + 1)$, substituindo o valor de a , dado por $a = b \cdot q + r$ na desigualdade dada teremos, $b \cdot q \leq b \cdot q + r < b \cdot (q + 1)$ e subtraindo $b \cdot q$ obtemos $0 \leq r < b$ como queríamos. Assim, na Divisão Euclidiana “maior quociente” e “menor resto” se equivalem.

Também é importante salientar que é essa restrição para o resto (ou equivalentemente o maior quociente) que garante a unicidade para o quociente e o resto.

A divisão na sala de aula

Os alunos, com frequência, apresentam dificuldades com relação à compreensão dos conceitos que envolvem as quatro operações. Isso acontece, em parte, pela ênfase dada aos processos mecânicos para resolver as situações apresentadas. Segundo os PCN (1998), o ensino deve se concentrar na compreensão do significado e nas relações existentes entre eles. Além disso, o documento cita a importância das situações-problema na compreensão dos conceitos dos números e das suas operações.

Com relação às quatro operações básicas, o cálculo da divisão, por meio do algoritmo, tem sido considerado, por professores e alunos, como o mais difícil de ser assimilado, fato que gera preocupações e a necessidade de busca por estratégias e metodologias de ensino que possam proporcionar uma melhor aprendizagem desse conteúdo.

A noção do conceito de divisão precisa estar clara para o aluno, para que ele possa dar significado ao cálculo que ele vai executar. Um ponto que podemos destacar é o fato de

a divisão estar ligada a duas ideias diferentes: repartir em partes iguais (modelo partitivo) e a de verificar quantas vezes uma quantidade cabe na outra, trazendo a ideia de medida (modelo quotativo).

Exemplificamos esses modelos nas seguintes situações:

Partitivo: Se tenho 30 figurinhas para dividir entre meus três filhos, quantas figurinhas caberá a cada um deles?

Quotativo: Tenho 45 figurinhas e quero fazer pacotes com 5 figurinhas cada um. Quantos pacotes poderei fazer?

Sabemos que ambas as situações serão resolvidas pela operação de divisão, mas elas compreendem ações cognitivas diferentes. Na primeira situação, as figurinhas que foram divididas entre os filhos, resulta em um total de 10 figurinhas para cada filho, ou seja, iremos descobrir quantos elementos há em cada grupo formado. Na segunda situação, as figurinhas divididas em grupos de 5 resulta em um total de 9 pacotes, ou seja, considerando o exemplo dado, quantos grupos de 5 figurinhas “cabem” ou “estão contidos” em 45 figurinhas.

Esses modelos devem ser bem entendidos e é importante que sejam trabalhados em sala de aula, pois refletem na compreensão do algoritmo tradicional da divisão. Embora o modelo partitivo seja mais natural para o aluno, uma vez que se utiliza com grande frequência desse modelo em suas ações práticas de divisão, o algoritmo se estrutura segundo o modelo quotativo. Por exemplo, quando fazemos a seguinte operação $45 \div 9$, procuramos identificar quantas vezes o 9 “cabe” no 45, o que pode representar mais uma dificuldade para o aluno que não tem muita agilidade mental ou destreza com a tabuada e seu processo inverso.

Outra percepção é que,

A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem. Comparada às demais operações elementares, a divisão com números naturais é diferente no seguinte sentido. Enquanto na adição, na subtração e na multiplicação temos dois valores de entrada e obtemos apenas um terceiro valor de saída, que é o resultado da operação, **a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto**. O fato de obtermos duas informações como resultado de uma divisão com naturais faz com que problemas que envolvam esta operação possam ter respostas diversificadas, apesar de um mesmo contexto. (RIPOLL et al, 2015, p. 104, grifo do autor)

Um exemplo que podemos observar é o utilizado por Barroso (2010), ilustrado na Figura 1.

Figura 1- Exemplo de situação problema onde o resultado não é nem o quociente e nem o resto

André precisa transportar 115 estudantes até um museu. Em cada viagem, ele pode levar, no máximo, 8 pessoas. Qual é o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?

Fonte: BARROSO, 2010, p. 60

Podemos observar que o problema anterior fica resolvido com a operação de divisão, no entanto a resposta não é nem o quociente e nem o resto. Problemas dessa natureza são importantes para o aluno perceber a relação intrínseca entre os termos da operação de divisão, porém não é exatamente essa a abordagem que encontramos nos livros didáticos analisados.

Quando o todo não é múltiplo do divisor, caracteriza-se pela existência de um resto que vem acrescer o grau de dificuldade ao estudo da divisão. Neste caso, os alunos precisam interpretar não só o quociente, mas também o resto, para poderem dar uma resposta ao problema apresentado.

Nossa percepção é que a aprendizagem escolar da multiplicação e divisão está muito mais centrada sobre o ensino de algoritmos do que sobre o desenvolvimento conceitual. Ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre diferentes aspectos das situações que envolvem a divisão.

Consulta bibliográfica

Em nossa dissertação apresentamos um estudo com alguns comentários sobre alguns livros didáticos onde observamos como o processo de divisão é apresentado no 6º ano do Ensino Fundamental e como é tratado o resto de uma divisão Euclidiana, bem como o tipo de atividades que são propostas, especialmente as que enfatizam a busca pelo resto de uma divisão.

Apresentamos também uma consulta bibliográfica de algumas publicações que abordam divisão e congruências analisando alguns trabalhos escritos como resultado final dos cursos de programas de mestrado e doutorado. Realizamos uma busca por teses e dissertações sobre o assunto em bibliotecas digitais das universidades em que existem programas de pós-graduação na área de Educação Matemática e afins.

Sobre os livros didáticos sabemos que o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) oferece um relevante recurso didático no trabalho pedagógico do professor, tem um grande impacto na qualidade de ensino da escola pública e pretende ajudar os alunos

no avanço dos seus estudos. Nossa motivação para a análise desse material deriva de alguns fatores importantes. Um deles é o papel que os livros indicados pelo PNLD exercem sobre os educadores e alunos das escolas públicas, servindo muitas vezes como única fonte de referência para o professor, como citam os PCN:

Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (BRASIL, 1998, p. 21-22)

Percebemos que, basicamente, os livros analisados introduzem a divisão de números naturais com duas situações distintas. Uma que traz a ideia de repartir em partes iguais uma quantidade e outra com a ideia de calcular quantas vezes uma quantidade cabe em outra, contendo a ideia de medida. A relação fundamental da divisão, que apresenta o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, é apresentada em todos os livros analisados. Os autores caracterizam a divisão exata como aquela em que o resto é zero e a divisão não-exata como aquela em que há uma “sobra” na operação de divisão.

A metodologia utilizada na grande maioria dos livros didáticos caracterizou-se, predominantemente, por introduzir o conteúdo apresentado com exemplos do cotidiano ou exemplos lúdicos, seguidos de alguma sistematização e atividades de aplicação.

Nos livros analisados os exercícios são variados e um fato marcante dessa análise é que as questões abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente de uma divisão e o significado do resto tem sido apenas o de sobra sem ser dada uma importância maior mostrando, por exemplo, o resto como solução de um problema. Os poucos problemas que contemplaram o assunto estavam na lista de exercícios para os alunos sem nenhum comentário complementar.

A relação fundamental da divisão é tratada em todos os livros analisados e aparece em todas as listas de exercícios, uns em maior e outros em menor quantidade, o mesmo acontecendo com a ideia dos possíveis restos que uma divisão não exata pode deixar. Na maioria dos livros analisados encontramos exercícios que podiam ser resolvidos utilizando apenas os procedimentos de cálculo e também situações-problema que envolviam situações cotidianas.

De uma maneira geral o conteúdo foi apresentado com o fornecimento das informações básicas corretas, embora em alguns livros não tenha sido enfatizada a restrição sobre o resto nem a condição do quociente ser o maior possível.

Consideramos que o posicionamento que o professor assume diante da bibliografia sugerida pela escola é decisivo na qualidade da aprendizagem dos alunos e, embora o livro seja um importante elemento no processo de ensino e aprendizagem, ele deve assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o professor, não sendo a única fonte de pesquisa.

Quanto às publicações pesquisadas, percebemos que mostram a relevância do tema, suas dificuldades e sugestões de questões. Ou seja, que os alunos têm dificuldades com a divisão Euclidiana e que é importante realizar trabalhos que desenvolvam propostas para lidar com esse tema de maneira mais aprofundada.

No nosso trabalho levamos em conta esses direcionamentos e nos inspiramos em algumas sugestões de questões para elaborar a nossa sequência didática, onde propomos a retomada e o aprofundamento da divisão Euclidiana através de uma abordagem mais abrangente do que aquela tradicionalmente apresentada nos livros didáticos para o ensino fundamental, apontando situações do dia a dia nas quais o resto da divisão é o componente relevante.

Procedimentos metodológicos

Considerando o tema que pretendemos investigar e quanto aos objetivos a que se propõe esta pesquisa, optamos por uma abordagem do tipo qualitativa/exploratória e, quanto aos procedimentos técnicos, fizemos uso do estudo de caso. Os dados reunidos tiveram caráter descritivo, sendo coletados diretamente no contexto da sala de aula através do contato direto da pesquisadora com os alunos.

Como instrumento de coleta de dados foi utilizada as produções dos alunos nas atividades propostas, os registros da professora e a gravação das aulas, já que todas as aulas foram gravadas para a análise *a posteriori*.

As colaborações e intervenções feitas pela professora ocorreram durante as aulas e sempre que solicitada pelos alunos, buscando ter o cuidado de não apresentar a resposta esperada, mas de provocar os alunos através de questionamentos para que chegassem às próprias conclusões.

A pesquisa foi composta por atividades cujo foco é a investigação matemática, nas quais os alunos foram convidados a resolver as atividades propostas. As investigações levaram os alunos a criar, testar e justificar suas resoluções.

Após o estudo e análise do que já havia sido escrito sobre o assunto em outras dissertações, tese e análise dos livros didáticos, passamos para o planejamento da sequência didática, desde a escolha da abordagem didática até a elaboração das atividades.

Segundo Skovsmose (2000), a prática de exercícios também é importante para a aprendizagem de Matemática, porém ela não deve ser limitada à reprodução de algoritmos e aplicação de fórmulas e sim proporcionar desafios aos estudantes, por isso, quanto à abordagem didática, optou-se por propor situações-problema.

Sabemos que um dos objetivos no ensino de matemática é resolver problemas. Isso pode ser alcançado por meio do desenvolvimento, na escola, de atividades matemáticas significativas, que impliquem na construção de estratégias e procedimentos de resolução.

Na maioria das atividades propostas os alunos devem realizar a conversão dos problemas escritos em língua natural para a linguagem matemática para depois realizar o tratamento da operação. De acordo com Duval (2003, p. 22),

[...] a compreensão matemática está ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Além do que, a conversão entre tais registros é fundamental porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento em um mesmo registro, porém, é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto [...] Porque duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo”

A maioria das atividades foi criada especialmente para a pesquisa e outras adaptadas de questões da OBMEP e inspiradas em atividades encontradas nas dissertações de mestrado que foram analisadas. Buscou-se utilizar, nas atividades propostas, uma linguagem que se aproximasse, ao máximo possível, da linguagem verbal usada pelos alunos. Além disso, as situações-problema foram pensadas de modo que fossem familiares ao cotidiano do aluno.

A íntegra das atividades da sequência didática, bem como a análise de cada uma delas encontra-se detalhada em nossa dissertação de mestrado.

Considerações finais

Confirmou-se nossa crença de que o uso tradicional dos problemas, reduzidos à aplicação e sistematização dos conhecimentos, pode contribuir para o desinteresse do aluno, impedindo o seu pleno desenvolvimento. O treino excessivo de definições e técnicas torna-se uma atividade rotineira e mecânica, em que se valoriza apenas o produto

final. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das ideias lógico-matemáticas impede a necessária construção dos conceitos. Desta forma, “o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato, incompreensível” (BRASIL, 1998, p. 30)

Por meio da análise dos livros didáticos constatamos que no ensino tradicional, a operação de divisão está focada no procedimento de cálculo associado a um grupo de problemas que, supõe-se, serão suficientes para o entendimento do significado do conceito. O modo de utilização do algoritmo mostra uma relação superficial com o conceito estudado, pois saber operar com o algoritmo da divisão não significa que o aluno compreenda cada termo dessa operação.

Entendemos que nas séries finais do ensino fundamental, a revisão da divisão Euclidiana poderia ser desenvolvida priorizando os significados dessa operação, já que o algoritmo da divisão é um instrumento poderoso para resolver problemas e que pode dar significado para cada termo dessa operação dentro de seu contexto.

Através da busca pela resposta da questão norteadora da pesquisa, procuramos maneiras de mostrar que é possível aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a enfatizar-se também o resto, percebendo-o como solução de alguns eventos cíclicos, por meio de um trabalho que oportunize a revisão da divisão Euclidiana, conectando assuntos da realidade do aluno.

Acompanhando a evolução dos alunos durante a aplicação da sequência didática avaliamos que a metodologia adotada contribuiu para comprovar que existe outra maneira de trabalhar a divisão no ensino fundamental de modo que seja dirigido um olhar especial para o resto da divisão não exata além do de “sobra” e que durante a revisão algorítmica da divisão Euclidiana é possível recordar conceitualmente esse tema, de modo a tornar o assunto mais significativo para o aluno.

Durante a execução das primeiras atividades da sequência didática percebemos que os alunos tiveram algumas dificuldades para escrever as justificativas das respostas e solicitavam a presença da professora com muita frequência, o que demonstrou interesse e preocupação em resolver as atividades da melhor forma possível. Durante as aulas notamos que os alunos desenvolveram a autonomia quando procuraram discutir as respostas com os colegas sem a presença da professora.

Dessa forma pensamos que resolver situações-problema foi uma escolha acertada, pois permitiu aos alunos colocarem-se diante de questionamentos e pensar por si próprios, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso de regras e algoritmos padronizados.

No transcorrer das atividades percebemos uma crescente familiaridade dos alunos com a operação de divisão e com a utilização do resto como uma ferramenta para a resolução de problemas cíclicos.

A sequência de atividades possibilitou que os alunos transitassem entre diversos tipos de representações semióticas, o que para Duval (2003) sinaliza o entendimento dos conceitos envolvidos. Os alunos transitaram entre registros de descrição verbal, expressões e operações numéricas e registro geométrico, dando mais significado ao resto da divisão Euclidiana.

Percebemos, de forma positiva, a desacomodação dos alunos frente a atividades e perguntas pouco usuais em situações problema, onde deveriam justificar/argumentar a resposta, ou representar o processo inverso, ou a soma de restos. Consideramos as situações-problema oferecidas desafiantes e bastante próximas da realidade da turma de modo que os alunos atribuíssem significado ao que estavam desenvolvendo.

Nossa experiência com essa sequência didática foi positiva pois, por meio das análises das atividades, pudemos perceber que eles compreenderam que podem utilizar o resto de uma divisão Euclidiana e até somar restos, para resolver problemas. Por essa atividade ter sido bem-sucedida, esperamos que outros professores possam aproveitá-la e utilizá-la em suas práticas docentes.

Sabemos da importância do livro didático, pois ele acaba determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino. Seria importante termos livros texto embasados em teorias educacionais atuais e não somente em definições/resultados/exemplos/exercícios e que levem em conta o processo de aprendizagem dos alunos. O livro didático deveria conter informações e conceitos ilustrados de várias formas, que segundo Duval (2003), são indispensáveis à aprendizagem e ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Acreditamos que as ideias de Skovsmose (2008) podem ser um ponto de partida nessa direção, já que os cenários de investigação oportunizam vários enfoques para a resolução de um mesmo problema e estimulam o pensamento crítico, imprescindível no desenvolvimento cognitivo do aluno.

Propomos uma abordagem mais abrangente do ensino da divisão do que as propostas tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos do ensino fundamental e esperamos que este trabalho possa contribuir para a relevância da reflexão contínua sobre o fazer docente, o material utilizado e a abordagem dos diversos conteúdos matemáticos nas séries finais do ensino fundamental. Portanto, podemos dizer que nossa experiência complementa o estudo da divisão na educação básica.

Referências

BARROSO, Juliane M. *et al.* **Projeto Araribá, 6º ano – Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. In MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papyrus, 2003.

RIPOLL, Cydara *et al.* **Livro do Professor de Matemática: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, nº 14, p. 66 – 91, 2000.