

## **Construindo o conceito de ângulo: transitando entre representações, contextos e artefatos**

Mariana Rodolfo Rocha<sup>1</sup>

### **GD2 – Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental**

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma atividade desenvolvida com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, que envolveu a reprodução e comparação de ângulos, sem o uso de instrumentos convencionais de medida, em diferentes figuras e suportes – papel, materiais manipulativos e lousa digital. A atividade integrou uma sequência didática mais ampla orientada para a construção do conceito de ângulo. Os dados foram coletados através de gravação em vídeo, fotografias das produções dos alunos e anotações em um diário de bordo. A análise dos dados permitiu concluir que a mobilização da noção de ângulo em diferentes contextos e a conversão dos registros em diferentes artefatos contribuiu para a construção do conceito geométrico de ângulo.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Ângulo; Lousa digital; Artefatos virtuais e manipulativos.

### **Introdução**

Como professora do Ensino Fundamental, sempre tive interesse pelo ensino de Geometria. As figuras geométricas admitem diversas representações; considero que as visuais, por meio de desenhos, movimentos, gestos, são as mais impactantes no ensino e na aprendizagem, pelo apoio que fornecem ao pensamento geométrico. Com o uso das tecnologias digitais e de materiais manipulativos, essas representações ganham dinamismo, favorecendo a identificação de propriedades e relações e a construção dos conceitos pelos alunos.

O conceito de ângulo pode aparecer em diversas situações de nossas vidas. Na construção de uma rampa de acesso, a inclinação deve ser muito bem pensada, para que ela possa ser utilizada por pessoas com deficiência ou restrições de movimento. Quando engenheiros projetam estradas, precisam estipular curvas adequadas às condições do terreno, considerando também a capacidade de um carro, a uma certa velocidade, efetuar um determinado giro. Em nosso cotidiano essas situações não são percebidas como

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e-mail: [marianarocha87@gmail.com](mailto:marianarocha87@gmail.com), orientadora: Profa. Dra. Elisabete Zardo Búriço.

envolvendo um conceito matemático, mas tais contextos podem ser explorados, em sala de aula, como ponto de partida para a construção da noção de ângulo.

Segundo Mitchelmore e White (2000), para que tal conceito seja compreendido, deve ser mobilizado em diferentes contextos (giros, inclinações, aberturas) e por meio de variadas representações (figuras, movimentos, descrições verbais, dentre outras). Faggiano, Montone e Mariotti (2016) enfatizam também a potencialidade do uso de diferentes artefatos, dentre os quais destacam os materiais manipulativos, a lousa digital e a *internet*, como suportes para a realização de atividades voltadas ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

### **A proposta da pesquisa**

A pesquisa tem como base a utilização de materiais manipulativos e da lousa digital para o ensino e aprendizagem do conceito de ângulo. Por meio das atividades propostas procurou-se compreender de que maneira os registros mobilizados no uso da lousa digital seriam convertidos ao se utilizarem materiais manipulativos e recursos mais usuais como o caderno, e vice-versa.

Considerando o caráter multifacetado do conceito de ângulo, foi elaborada uma sequência didática envolvendo atividades variadas em que alunos seriam convidados a explorar esta nova ferramenta escolar, a lousa digital, e materiais manipulativos, mobilizando o conceito de ângulo em diferentes contextos. Para a aplicação da sequência, foram organizadas oficinas de Matemática para as quais foram convidados alunos do sétimo ano de uma escola da rede municipal de Canoas, Rio Grande do Sul.

As oficinas de Matemática aconteceram entre agosto e setembro de 2016, no contraturno escolar. Neste artigo, são relatadas e analisadas as atividades realizadas em dois desses encontros, nos quais foram abordadas a classificação de figuras do cotidiano onde aparecem “ângulos”, a reprodução desses ângulos em diferentes artefatos, inclusive variando suas orientações, e a comparação entre ângulos, sem o uso de instrumentos convencionais de medida.

Em todos os momentos, a produção escrita dos alunos foi utilizada como instrumento de coleta de dados para a pesquisa, bem como a gravação em vídeo das aulas para posterior uso das transcrições e um diário de bordo para anotações durante as aulas.

## Referencial teórico

Não parece haver unanimidade quanto à definição para ângulos nos livros didáticos atuais.

De acordo com Vianna e Cury (2001):

Uma definição dependerá do uso que se pode fazer daquilo que se pretende definir [...] adotado o nosso critério para dar definições, não existiria uma “essência”, um significado “correto” e aplicável a todas as significações para a palavra ângulo (*Ibid.*, p. 30-31).

As disparidades entre os livros evidenciam dificuldades em se construir uma definição abrangente. Essa mesma dificuldade aparece na compreensão do conceito de ângulo pelos alunos. Segundo Mitchelmore e White (2000), os alunos têm grande dificuldade em coordenar as várias facetas do conceito de ângulo e indicam que o conceito de ângulo se desenvolve lentamente.

A definição mais utilizada para o conceito de ângulo, presente inclusive no livro didático adotado pela escola em que o trabalho foi realizado, é a da união de duas semirretas de mesma origem; segundo essa definição, as semirretas são denominadas lados do ângulo e o ponto de origem chama-se vértice. Compreender o conceito de ângulo envolve considerar ambas as semirretas abstraindo o comprimento dos lados visíveis ou evidentes da figura, e a orientação das semirretas em relação a outros elementos, como a borda do papel ou da tela da lousa.

De acordo com Bolda (1997), para que ocorra a visualização de uma figura geométrica, é preciso ir além da apreensão perceptiva, focalizando dados que não são impostos imediatamente ao olhar. Duval (2012) distingue outras três formas de apreensão de uma figura: a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão sequencial. A visualização decorre da articulação entre a apreensão perceptiva e a apreensão operatória, “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações” (*Ibid.*, p. 125).

Cada figura pode ser modificada de várias maneiras diferentes. A sua subdivisão em partes, de modo a formar subfiguras, configura uma modificação mereológica. Aumentando, diminuindo ou deformando a figura efetuamos uma modificação ótica. Por fim, pode-se deslocar ou rotacionar a figura, sendo esta modificação chamada de posicional (DUVAL, 2012). Neste trabalho, procuramos identificar as articulações entre as apreensões perceptiva e operatória, e as modificações envolvidas na construção do conceito de ângulo pelos alunos.

A utilização de material manipulativo se fez presente em praticamente todos os momentos da atividade proposta. Assim como Faggiano, Montone, Mariotti (2016), acredito que:

A capacidade de visualização de relações geométricas dos aprendizes pode ser desenvolvida à medida que eles construam, desenhem, modelem, tracem e meçam. Ativar os estudantes no envolvimento com o uso de artefatos manipulativos é, de fato, fundamental em geometria. Tais atividades desenvolvem neles habilidades de visualização e raciocínio sobre relações especiais.

### **A atividade proposta**

Neste artigo, abordamos uma das atividades realizadas durante as oficinas de Matemática. A atividade foi organizada em quatro momentos e aplicada ao longo de dois encontros distintos e consecutivos, sendo estes os segundo e terceiro do total de sete encontros. O objetivo da atividade era o reconhecimento de ângulos em objetos da vida cotidiana, bem como sua reprodução utilizando um artefato manipulativo construído pelos alunos e a comparação entre tais ângulos, baseada em estimativas.

No primeiro momento, os alunos, organizados em grupos, deveriam agrupar as figuras dadas segundo alguma classificação definida por eles. Tal classificação deveria ser justificada pelos grupos, sendo esta de livre escolha. O objetivo, nesse primeiro momento, era verificar se algum dos grupos identificaria que todas as figuras continham ângulos e que eles poderiam ser classificados segundo suas amplitudes.

**Figura 1: Figuras utilizadas na atividade proposta**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

No segundo momento, os alunos deveriam utilizar um material manipulativo constituído de pedaços de etileno acetato de vinila (e.v.a.) e de colchetes de costura. Foi solicitado que,

com esse material, reproduzissem os ângulos que aparecem nas figuras do leque, da tesoura, da cadeira e da bailarina.

Para o terceiro momento da atividade, foram mostradas aos alunos alguns ângulos – naquele momento referidos como “aberturas” - e foi pedido a eles que os relacionassem com os ângulos mostradas nas figuras, com o objetivo de verificar se identificariam ângulos iguais em orientações diferentes das exibidas nas figuras. Finalizando a atividade, foi solicitada uma nova classificação das figuras, desta vez tendo como base as “aberturas” mostradas nas figuras. Para tal classificação, as “aberturas” (isto é, os ângulos) poderiam ser ordenadas da menor para a maior, e comparadas por meio do instrumento de e.v.a..

### **Relato da aplicação da atividade**

Para o primeiro momento, foram disponibilizadas figuras diferentes aos alunos e foi solicitado que eles classificassem as figuras de alguma maneira e justificassem a classificação.

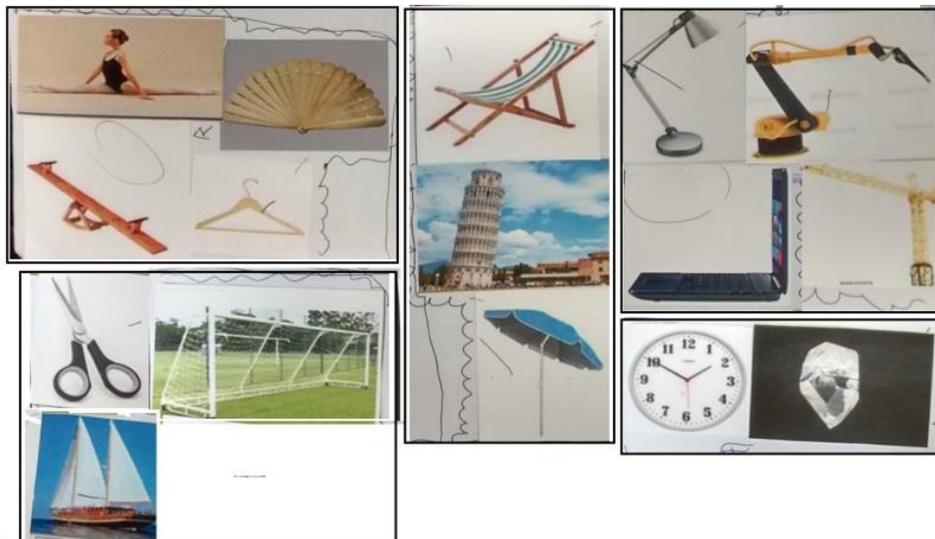
O grupo 1 pensou primeiro em classificar entre figuras maiores e menores, e depois de alguma discussão inalizaram a classificação utilizando as categorias “objetos”, “fotografia” e “construção”.

A ideia do grupo 2 foi classificar as figuras de acordo com os polígonos ou com o formato das molduras das figuras. Tiveram dificuldade em classificar a bailarina, uma vez que não aparecia nenhum polígono na figura.

O grupo 3 inicialmente pensou em classificar as figuras com relação à sua posição. A aluna K comentou que a bailarina e o leque ficariam na mesma classificação pois formavam “ângulo reto”. Depreende-se que a aluna fez referência ao ângulo raso formado pelas pernas da bailarina e que a intenção da aluna era dizer reto, no sentido de formar um ângulo de  $180^\circ$ . Cabe ressaltar que a palavra ângulo apareceu espontaneamente, talvez advinda de discussão realizada no encontro anterior, ou de outras experiências. A aluna P sugeriu a classificação com relação a cor. O grupo solicitou a presença da professora e disse não estar entendendo a atividade, uma vez que as figuras poderiam ser classificadas de várias maneiras. Expliquei ao grupo que as figuras deveriam ser separadas de alguma maneira, sendo esta de livre escolha do grupo.

A aluna K mencionou que estavam classificando de acordo com os ângulos. Como era essa a classificação que eu gostaria que fosse visualizada, concordei com a escolha. A aluna K falou sobre ângulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , o que reforça a hipótese de que já teria havido o contato com ângulos em algum momento anterior. O grupo finalizou a atividade com a seguinte classificação: figuras “abertas” (contendo ângulos rasos), como a bailarina, a gangorra, o leque e o cabide; grupos com “figuras dobradas”; o relógio e a pedra compuseram um grupo das figuras sem ângulos. A Figura 2 mostra a classificação feita pelo Grupo. Em cada grupo de “figuras dobradas” incluíram uma figura contendo um ângulo que consideraram como sendo de  $30^\circ$ , um de  $60^\circ$  e um de  $90^\circ$ .

**Figura 2 – Classificação feita pelo grupo 3**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Após esse momento, foi realizada uma discussão com o apoio da lousa digital, em que as figuras eram exibidas e podiam ser movimentadas. Pedi que eles separassem as figuras segundo os movimentos possíveis dos objetos representados pelas figuras. Ao falar da cadeira, um aluno mencionou que ela “abria e fechava”, e aí vários alunos começaram a falar de figuras de objetos que abriam e fechavam com o guarda-sol e o leque. Os alunos imaginaram os movimentos dos objetos, indo além da apreensão perceptiva, e concluíram que os movimentos dos objetos representados pelas figuras eram movimentos de abertura e fechamento ou de giro. Por este motivo, antes de abordarmos a ideia matemática de ângulo, abordamos esse conhecimento prévio relacionado a aberturas, giros e voltas.

A denominação de “abertura”, inicialmente relacionada ao movimento de “abrir e fechar”, logo foi aplicada pelos alunos em referência a ângulos fixos, de objetos sem movimento,

como o cabide. Durante esse encontro e o seguinte, antes de formalizar a definição de ângulo, continuei utilizando essa nomenclatura.

Na lousa, tracei segmentos de retas para melhor identificar as “aberturas” identificadas nas figuras pelos alunos. Para algumas figuras como o cabide, a cadeira e a bailarina, mais de uma “abertura” foram identificadas.

**Figura 3 – Diferentes ângulos identificados na mesma figura**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Perguntei se havia semelhanças entre as aberturas das figuras e o aluno E disse que a abertura do relógio e da tesoura eram parecidas, fazendo referência às posições dos ponteiros do relógio e dos braços da tesoura (ambos apontando “para cima”). A bailarina foi relacionada com o *notebook* e com o leque, considerando dois ângulos diferentes (marcados na Figura 3). Outro aluno relacionou o relógio e a cadeira (nas duas figuras aparecem ângulos obtusos), e perguntei se a tesoura poderia estar na mesma classificação. O aluno R disse não concordar com as três figuras na mesma classificação pois na tesoura a abertura era mais “fechadinha” (menor). Perguntei aos alunos se era comum verem construções parecidas com a Torre de Pizza e eles responderam que não, que as construções geralmente eram “retas” (expressão do aluno para a palavra vertical), tendo sido “feitos cálculos para que saísse reto”.

Perguntei aos alunos se era possível medir as aberturas e logo me responderam que bastava uma régua. Questionei se com a régua normal poderíamos medir, por exemplo, a abertura do leque ou só o tamanho do leque, e prontamente eles responderam que a ideia era medir a abertura e que com a régua normal não seria possível medi-la. Mostrei o transferidor para os alunos dizendo que utilizaríamos aquele instrumento para medir ângulos e que mais tarde aprenderíamos a manuseá-lo.

No início do encontro seguinte, novamente foi utilizada a lousa digital para mostrar aos alunos as figuras utilizadas no primeiro momento. Foi também apresentado aos alunos o objeto manipulativo que serviria como instrumento para os próximos momentos da atividade proposta.

**Figura 4: Instrumento manipulativo construído para reprodução e comparação de aberturas**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Neste segundo momento, foi solicitado aos alunos que reproduzissem a abertura do leque e um aluno do grupo 1 logo utilizou o instrumento de e.v.a. como se fosse um leque, abriu-o usando um ângulo diferente do mostrado na figura e começou a se abanar.

**Figura 5 – Aluno E reproduzindo a abertura do leque no 1º momento**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Só a partir do momento em que eu frisei que o leque em questão era o que aparecia na figura, ele mudou a abertura do seu instrumento, relacionada agora à do leque mostrado na figura. Um terço deles representou a abertura do leque como um pouco menor do que  $180^\circ$ , sem o instrumento manipulativo completamente aberto. Os demais alunos representaram a abertura do leque como a abertura completa do instrumento manipulativo.

A próxima “abertura” a ser reproduzida era a da tesoura. Escolhi esse objeto para verificar se os alunos representariam o ângulo em uma orientação diferente da mostrada na figura.

Os alunos tentavam se aproximar da lousa digital para justapor seu instrumento à figura, entretanto foi dito a eles que deveriam reproduzir a abertura com o objeto manipulativo sem fazer essa justaposição, através de uma estimativa.

**Figura 6 – Orientação da tesoura apresentada aos alunos**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Foi interessante observar que a maioria dos alunos reproduziu a figura com orientação vertical, diferente daquela mostrada na figura.

Para a próxima representação, escolhi a cadeira - um objeto no qual, na atividade anterior, os alunos haviam identificado vários ângulos. A intenção aqui era identificar se diferentes ângulos seriam identificados na mesma figura. A primeira pergunta que os alunos fizeram foi a de qual abertura deveriam representar. Dos três grupos, dois representaram o ângulo obtuso marcado na Figura 7. O grupo restante, juntou dois objetos manipulativos para formar dois ângulos que aparecem na cadeira. Foi surpreendente perceber que os dois ângulos não foram reproduzidos separadamente e então colocados na figura. Para o ângulo obtuso, foi utilizado um segmento de cada objeto de e.v.a., de modo a montar a “abertura”. A composição respeitou a estimativa de que um ângulo era agudo e outro obtuso, porém não houve uma apreensão global, identificando que, juntos, formavam um ângulo raso. Um braço da cadeira foi representado como se estivesse “dobrado”.

**Figura 7 – Reprodução de algumas aberturas visualizadas na cadeira pelo grupo 2**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

Logo dei início ao momento seguinte, onde representei, utilizando o instrumento manipulativo, “aberturas” com orientações variadas. Ao mostrar a primeira abertura

(ângulo reto), a primeira resposta que apareceu foi o *notebook* e em seguida o guindaste, tendo sido ainda observado pelo aluno R que a abertura, na foto, estava diferente.

**Figura 8 – Primeira abertura mostrada e figuras relacionadas**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

De fato, o ângulo entre os braços do guindaste é de  $90^\circ$ , porém, a foto foi tirada sob um ponto de vista que faz aparecer, na representação plana, um ângulo diferente. A escolha dos alunos mostra uma apreensão operatória, isto é, a partir da representação plana eles puderam realizar uma modificação e identificar o ângulo reto no objeto tridimensional. Para a segunda abertura (ângulo obtuso mostrado na parte esquerda da Figura 9), houve o seguinte diálogo no grupo 2:

*Aluno R: É assim mesmo ou é de outro jeito, sora?*

*Professora: O que falamos anteriormente? Faz diferença se é assim, ou é assim, ou é assim (com gestos, mudando a orientação do ângulo)?*

*Aluno R: Ah! Tô ligado qual é! É a Torre de Pisa.*

*Aluno G: Hã??? (Refletiu um pouco) É também a luminária. E se forçar um pouco pode ser o guarda-sol.*

**Figura 9 – Segunda abertura mostrada e figuras relacionadas**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

O aluno G, provavelmente não concordou com o aluno R pois estava pensando na abertura formada à direita, entre a torre e o chão, que é a mais evidente na figura, porém, a afirmação do aluno R estaria correta considerando o ângulo suplementar, à esquerda.

Para finalizar a atividade, pedi que os grupos classificassem novamente as figuras, porém agora olhando para as aberturas presentes nas figuras, da “menos aberta” para a “mais aberta”. Os alunos mencionaram a tesoura como a “menos aberta”.

**Figura 10 – Grupo 3 reproduziu a abertura da pedra e comparou com o braço robótico**



Fonte: arquivo pessoal da autora.

A partir dos registros verifica-se que os alunos realizaram uma intensa comparação entre as figuras, duas a duas, ou três a três, não mais que isso, não tendo sido feita uma comparação global, envolvendo todas as figuras.

Nesta aula um dos grupos fez uma constatação muito interessante. No grupo 2, o aluno G perguntou à professora se “ele (objeto manipulativo) fechado” não seria tecnicamente a menor abertura e seu colega de grupo, o aluno R, disse logo em seguida que também poderia ser a maior abertura. Nesse instante o colega W, coloca as mãos na cabeça e diz: “Peraí, perai! Não entendi nada! Que bizarro!” Os colegas G e R me ajudaram a explicar ao colega W que a “maior abertura” poderia corresponder a um giro completo de uma das peças e desse modo resultar na mesma configuração da “menor abertura”, quando o objeto manipulativo estava fechado. Em encontros posteriores, foi abordado o contexto de giros e de “aberturas” maiores do que uma volta completa.

### **Considerações finais**

Desde o primeiro momento, os alunos mostraram indícios de apreensão operatória, pois na discussão em grande grupo, classificaram os objetos segundo movimentos angulares que não foram mostrados, mas imaginados. Evidenciaram a realização de modificações mereológicas, ao identificarem diferentes ângulos (“aberturas”) que não estavam inicialmente destacados nas figuras.

As modificações óticas foram necessárias para a comparação e reprodução de ângulos em instrumentos e objetos de tamanhos diferentes, e as modificações posicionais, ao compararem ângulos de mesma medida (“abertura”), mas com orientações diferentes.

O trânsito entre os diferentes contextos e artefatos – instrumentos de e.v.a., figuras em papel e a lousa digital – foi importante, porque cada um deles auxiliou os alunos, de um modo peculiar, a imaginar e experimentar as modificações nas figuras.

Considero que a atividade atendeu o seu propósito, pois os alunos evidenciaram a abstração da ideia de “abertura” em relação a cada um desses contextos e artefatos, o que indica a compreensão, ainda que inicial, do conceito de ângulo.

### **Referências**

BOLDA, C. R. F. **Geometria e visualização**: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. Dissertação de Mestrado em Educação - Educação e Ciência, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

FAGGIANO, E., MONTONE, A. e MARIOTTI, M. **Creating a synergy between manipulatives and virtual artefacts to conceptualize axial symmetry at primary school**. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/306066257\\_Creating\\_a\\_synergy\\_betwwen\\_manipulatives\\_and\\_virtual\\_artefacts\\_to\\_conceptualize\\_axial\\_symmetry\\_at\\_primary\\_school](https://www.researchgate.net/publication/306066257_Creating_a_synergy_betwwen_manipulatives_and_virtual_artefacts_to_conceptualize_axial_symmetry_at_primary_school)> Acesso em: 09 out. 2016.

MITCHELMORE, Michael C.; WHITE, Paul. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 41, n. 3, p. 209-238, 2000.

VIANNA, Carlos R.; CURY, Helena N. Ângulos: uma “História” escolar. **Revista História & Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 23-37, 2001.