A matemática que emerge em uma investigação sobre curvas cônicas

Bruno Leite Ferreira[1]

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

O presente artigo apresenta parte dos dados produzidos em uma pesquisa de doutorado que se encontra em seu segundo ano de desenvolvimento. O trabalho tem por objetivo analisar as características matemáticas que emergem em uma investigação sobre curvas cônicas. Para tal, foi formado um grupo de estudos com estudantes de um curso de Matemática e o pesquisador, compondo os sujeitos da pesquisa. A partir dos dados – vídeo gravações das reuniões, diários individuais e mensagens de um grupo do aplicativo para celular WhatsApp, estão sendo criadas narrativas no intuito de aproximar o leitor da investigação. Neste artigo apresenta-se um primeiro ensaio que explora a discussão realizada sobre as possibilidades de formação de uma superfície cônica, como também de outras superfícies, perpassando por aspectos ligados à Geometria Projetiva. A participação neste evento tem o intuito de obter contribuições com relação a referenciais para embasar a análise dos dados, como também outras sugestões que forem consideradas pertinentes pelo grupo de discussão no qual está inserido.

Palavras-chave: curvas cônicas; superfície cônica, investigação, tratamento dos dados; narrativa.

O panorama da pesquisa

No presente artigo dedico-me a apresentar parte dos dados produzidos em minha pesquisa de doutorado, que se encontra em seu segundo ano de desenvolvimento, a fim de obter contribuições no âmbito de referenciais que me auxiliem na análise dos dados, bem como outras observações que sejam consideradas pertinentes pelos membros do grupo de discussão GD04, ao qual este texto foi submetido para apreciação.

Em minha pesquisa, coloco como questão norteadora a seguinte interrogativa: O que se pode conhecer sobre curvas cônicas partindo do conhecimento prévio de integrantes de um grupo de estudos? Nesta direção, proponho como objetivo analisar que características matemáticas emergem em uma investigação sobre curvas cônicas. Entendo por características matemáticas as qualidades dos objetos matemáticos, bem como as possíveis relações e propriedades que possam existir entre seus elementos.

Em virtude de me interessar mais pelo processo de como as características são constituídas pelo grupo, do que pelo resultado final, compreendo minha pesquisa sob uma abordagem qualitativa (LÜDKE; ANDRÉ, 1987; GARNICA, 1999; BORBA; ARAÚJO, 2006).

---

[1] UNESP – Rio Claro, e-mail: brunolf@gmail.br, orientadora: Drª. Rúbia Barcelos Amaral.

Para produção de dados foi criado um grupo de estudos, segundo a visão de grupos de estudos independentes de Murphy e Lick (1998), com reuniões semanais durante o ano de 2016, tendo duração de uma hora no primeiro semestre e duas horas no segundo semestre.

Compreendem os sujeitos da pesquisa os participantes do grupo de estudos, quais sejam o pesquisador desta pesquisa – professor de Geometria Gráfica no Colégio de Aplicação da UFPE em licença para o doutorado – mais quatro alunos do curso de Matemática da UNESP (Campus de Rio Claro), sendo dois do segundo ano (um do bacharelado e um da licenciatura) e dois do terceiro ano (ambos da licenciatura).

Todos os encontros foram/estão sendo vídeo gravados, compondo os dados desta pesquisa, juntamente com os registros de texto, áudio e imagem de um grupo em um aplicativo de troca de mensagens para celular (WhatsApp) e, textos e desenhos de diários individuais, nos quais os sujeitos podem registrar e/ou compartilhar inferências, dúvidas que surgiram durante a semana, que não na reunião do grupo de estudo. A produção e tratamento das vídeo gravações seguem as recomendações de Garcez, Duarte e Eisenberg (2011).

A metodologia adotada para a condução do grupo de estudos inspira-se em duas propostas de investigação, a de Ponte et al. (2009) e Skovsmose (2000). Em ambas o aluno é percebido como protagonista do processo. Na primeira perspectiva os autores descrevem uma metodologia de ensino em etapas de investigação, tendo em vista o professor como mediador do processo que, apesar de saber onde quer que o aluno chegue, não sabe qual caminho vai ser percorrido. Na segunda perspectiva, o autor propõe um cenário para investigação como ambiente que proporciona a reflexão sobre o próprio processo de investigar.

Já em minha perspectiva, que chamo de Investigação Geométrica, também considero o aluno como protagonista, contudo, saio do contexto de uma sala de aula, partindo para um ambiente em que não há uma situação pré-estruturada que conduz a um conceito esperado, mas há a liberdade de explorar aquilo que se considera interessante, de modo que se constitua um corpo matemático sustentável pelas próprias discussões do grupo e não necessariamente por informações advindas de pesquisas em internet por exemplo. Tal investigação parte de um ‘olhar imaculado’, assim como os geômetras gregos ao descobrirem seus teoremas, ou comporem suas teorias, buscando respostas para os seus questionamentos a partir do que lhes era conhecido. Nesta perspectiva, não há papeis de aluno e professor, mas sim de pesquisadores, em seus diferentes níveis de conhecimentos, que juntos buscam compreender e conhecer mais sobre um objeto matemático.

Neste sentido, foi acordado entre participantes evitar a busca de informações sobre as curvas cônicas em outras fontes que não o grupo de estudos, contudo foi permitido a consulta a materiais referente a conteúdos que considerassem pertinentes para explorar alguma propriedade das cônicas.

Inspirado nos diários dos sujeitos da pesquisa, decidi apresentar os dados por meio de narrativas fictícias, sem distorcer a veracidade dos dados. Tal estilo de escrita é adotado em outras pesquisas de mestrado e doutorado, a exemplo Brito (1995), Oliveira (2015), Queiroz (2015) e Lopes (2016), seja na apresentação dos dados como em todo o texto como um modo de aproximar o leitor da pesquisa.

A seguir, apresento um primeiro ensaio de parte do capítulo de dados para que se possam ser observados aspectos com relação a natureza dos dados.

Pensando com os dados

Prólogo

***

Decidi tratar esse documento como algo mais pessoal, mais como um diário mesmo, por isso, abandonarei toda a “disciplina” e rigor que tentei usar antes, mas não apagarei o que já foi escrito (pelo menos por enquanto), porque talvez seja útil.

Concluí que transcrever o que foi falado nos encontros é (muito chato? sim) trabalho do Bruno. Então, só vou relatar algumas memórias das reuniões (que talvez não tenham sido muito claras) e de coisas que pensei no dia a dia. Não sei se os outros membros do grupo estão fazendo dessa maneira, mas é assim que me sinto a vontade para fazer.

***

Hoje tive vontade de começar a escrever sobre as minhas impressões das reuniões do grupo de estudos. Acho que isso pode me ajudar a escrever o trabalho da IC (Iniciação Científica). Fiquei muito empolgado quando o Bruno me convidou para participar desse grupo e falou da ideia de investigação geométrica, era exatamente o que eu queria fazer na

IC. Sempre quis fazer algo com Geometria, mas queria fazer algo diferente do que simplesmente demostrar teoremas, não que isso não seja importante, mas eu queria mais.

Acho que esse texto está mais com cara de um diário do que um relatório de reuniões, mas não importa, já que eu quero fazer algo diferente, por que não fazer diferente também na escrita? Assim não fico tão preso e consigo me expressar livremente.

***

Querido diário... mentira, nunca escrevi essa frase antes no meu diário, mas hoje comecei para fazer graça. Hoje o Bruno convidou o Bonner e eu para fazermos parte de um grupo de estudos sobre curvas cônicas, acho que vai ser legal. No final do semestre passado até nos oferecemos para caso ele precisasse de ajuda na pesquisa. Esse formato de grupo de estudos vai permitir que a gente aprofunde mais o conteúdo, diferente de como foi na disciplina de Desenho Geométrico em que tínhamos conteúdos específicos para aprender.

E claro que eu, como uma boa aluna do terceiro ano de Matemática, não poderia deixar de escrever no meu diário, as minhas compreensões, dúvidas, etc. sobre os encontros.

***

Não sou muito de escrever, tenho mais intimidade com números, mas as letras... só quando fazem parte de uma equação, acho que por isso optei pelo Bacharelado em Matemática. Em contrapartida estou aqui escrevendo, me permitindo, assim como aceitei o convite que o Melão me fez para participar de um grupo de estudos sobre curvas cônicas. Achei interessante, eu sou muito ruim em Geometria, tenho muita dificuldade, não que eu não goste, pelo contrário, até gosto, só não entendo. Quem sabe não é uma oportunidade de aprender, assim como esta não seja também uma oportunidade de escrever mais.

***

Em meio a essas primeiras linhas me ponho pensativo sobre o que virá a emergir desse grupo de estudos. Me considero tão ansioso quanto os meninos, pois também eu tenho dúvidas e curiosidades sobre tema. Até cheguei a pensar em não me considerar como sujeito da pesquisa, mas se bem me conheço, seria impossível não estar imerso a investigação. Posso até imaginar possíveis caminhos que fariam lógica, mas o ser humano é imprevisível, e esses garotos, assim como meus alunos, me tiram da minha linha de raciocínio, me conduzindo para outros lugares, por consequência, minha visão é ampliada. Deixo a condição de apenas pesquisador produzindo uma tese ou de professor e me deparo com o *eu investigador* que também quer aprender, que chega em casa, se debruça sobre os livros, computador, criando nossas relações e querendo compartilhar com o grupo. Acabo investigando tanto constructos teóricos que possam me auxiliar na tese, como o conteúdo em si, o qual me encanta dentre os conteúdos da Geometria pela possibilidade de diversos olhares e de relações matemáticas.

Esse movimento de também ser sujeito foi para mim de suma importância, pois me colocando também como investigador pude questionar os questionamentos dos outros sujeitos, gerando novas questões, levando-as ao grupo, como também me conduziu ao desafio de produzir materiais que facilitassem a visualização, mas não necessariamente que dessem a resposta.

Bem que eu gostaria de estar na cabeça de cada um deles e saber o que se passa. Saber exatamente nunca saberei, mas espero que pelas reuniões do grupo de estudo e do grupo do WhatsApp possa observar a matemática emergente das nossas discussões. Visto que, em minha pesquisa o foco não está em quem disse, ou quando foi dito, mas sim no que foi dito, que conexões foram produzidas, desconstruídas e reconstruídas de modo a fazer sentido para este grupo.

***

O ponto de partida: o(s) cone(s), as superfícies e suas leis de geração

***

Tudo começou com uma simples pergunta que o Bruno fez no grupo do WhatsApp uma semana antes da nossa primeira reunião: *O que vocês entendem por curvas cônicas? E o que vocês sabem sobre elas?* Eu estava muito ansioso para começar as reuniões do grupo de estudos, para saber o que poderíamos descobrir e que atividades o Bruno levaria para gente.

Fiquei surpreso ao perceber que não necessariamente o Bruno nos traria atividades que nos conduziriam a conceitos que ele já previa, mas que nós iríamos, a partir das nossas discussões, elaborar questões para investigar e chegar as nossas próprias conclusões. Então vamos a questão de partida.

Bem, óbvio que a palavra "cônicas" está relacionada com cones, e eu sei que curvas cônicas tem esse nome por representarem diferentes cortes num par de cones com o vértice em comum. Mas como assim "cortes"? Primeiro, você imagina os dois cones alinhados pelo bico, daí imagina diferentes possibilidades de um plano interceptar esse par de cones que você imaginou (interceptar igual a cortar). A intercessão do plano com o cone, retratada nesse plano, é uma curva, uma curva cônica.

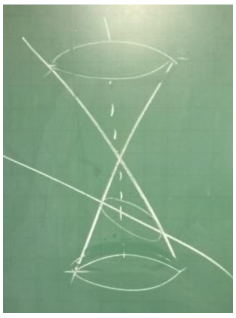
***

Nossa! Não entendi muita coisa do que o Bonner falou sobre as curvas cônicas lá no grupo do WhatsApp. A única coisa que eu lembro sobre o assunto foi quando na disciplina de História da Matemática assistimos o filme Ágora, que conta a estória de uma matemática grega, Hipátia. No filme ela pegava um cone, ia tirando as partes... era muito legal. Só consegui associar que as curvas cônicas vinham do cone, mas não entendi quando o Bonner explicou sobre as seções.

Quando ele reexplicou na reunião, não entendi porque tinha que ser dois cones ao invés de um. Ele foi no quadro e fez um desenho representando os dois cones e um plano cortando (Figura 1a) e começou a explicar que quando o plano for paralelo à base do cone a intercessão vai ser uma circunferência, quando tocar em alguma coisa, que eu não me lembro, vai ser uma reta. Tudo bem, eu até estava acompanhando a fala dele, mas ainda não fazia sentido para mim os dois cones.

Interrompi a explicação e perguntei: mas você disse que eram dois cones, por quê? Ele disse: “para fazer a hipérbole, se fosse só um cone não ia fazer as duas partes da hipérbole”. Ele fez um outro desenho mais simples dos dois cones e uma reta, que representava o plano cortando os cones (Figura 1b). Agora sim, fez sentido os dois.

Figura 1: Desenho de dois cones e um plano de seção.



(a) (b)

Fonte: dos dados.

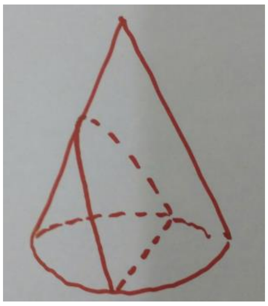
***

Definitivamente eu não estava entendendo nada do que estavam explicando nas conversas no WhatsApp, até entendi algumas coisas nos encontros do grupo de estudos, como por exemplo quando o Bonner explicou o corte nos dois cones, mesmo não entendendo muito bem, estava fazendo sentido. Mas sempre que acho que estou entendendo, vem o Bruno e faz uma pergunta que desconstrói o que eu estava pensando.

Após a explicação do Bonner ele perguntou: “o que é um cone? O que é seccionado é o cone?” Tudo bem não é, apenas a casca é cortada. Mas ele continuou: “se cortarmos o cone que o Bonner citou, a seção é uma curva cônica?” Na minha cabeça a resposta era óbvia, claro que sim. Ele fez um desenho no papel (Figura 2) e perguntou se o segmento de reta na base do cone fazia parte da curva cônica. Caramba, claro que não. Espera aí, então como vai ser esse cone que gera as curvas cônicas?

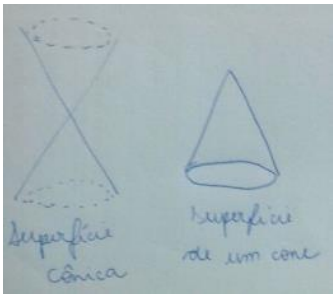
A Feithi comentou que tinha que ser apenas a parte de fora que era a superfície cônica. Mas o Bruno mais uma vez para acabar com a alegria pergunta: “E qual a diferença entre cone, superfície de um cone e superfície cônica?” Eu achava que superfície de um cone era a ‘casca’ e a superfície cônica era tudo. O Melão fez um desenho (Figura 3) pra explicar o que ele achava.

Figura 2: Desenho de um cone e um uma seção.



Fonte: dos dados.

Figura 3: Superfície cônica e de um cone.



Fonte: dos dados

Para ele, a superfície cônica era infinita e o cone não. Mas como sempre o Bonner tem que discordar do Melão (ou vice-versa), o Bonner disse que a superfície de um cone é a coisa oca e o cone é o sólido maciço, como a diferença entre a caixa e um cubo. Quando esses dois começam a filosofar o céu é o limite.

***

Para mim, entendo o cone como uma superfície cônica limitada, mas o Bonner entende a superfície cônica como algo que tem forma de um cone, ou seja, na minha visão o cone é derivado da superfície cônica, já o Bonner considera o contrário. Eis uma indagação: quem veio primeiro o ovo ou a galinha? O cone ou a superfície cônica?

Mas se pensarmos com calma, é um caso de *se e somente se*, ou seja, um implica no outro. Um cone pode gerar uma superfície cônica se tirarmos a base e prolongamos, já no caso contrário, se querermos gerar um cone a partir de uma superfície cônica, que é ilimitada, basta colocarmos um limite.

Podemos dizer então, que o cone é o sólido maciço (o volume), a superfície de um cone é a parte redonda (correspondendo à superfície cônica limitada) mais a parte plana (a circunferência) e a superfície cônica é a superfície ilimitada. Desse modo toda superfície de algo é ilimitada.

Se bem que quando penso em uma esfera, ou na superfície de uma esfera, ou na superfície esférica, as três são limitadas. Então, não necessariamente um objeto é limitado, nem uma superfície 'objética' é infinita. Por exemplo, podemos pensar em um cone infinito (não me refiro apenas a casca, mas a toda parte interna), já um cilindro, por exemplo, a sua superfície é limitada, porém, composta por dois tipos de superfícies uma cilíndrica e outra plana.

Toda essa discussão me fez lembrar do que o Bruno falou sobre a geração de uma superfície. Essa geração possui elementos geradores e elementos diretores, os diretores são elementos fixos que dirigem os elementos geradores a partir de uma lei de geração. Vamos pensar quem são os elementos que geram uma superfície cilíndrica. Hum... o eixo do cilindro pode ser a diretriz e uma reta paralela é a geratriz que se move mantendo a mesma distância da reta diretriz. De outro modo, a superfície cilíndrica pode ser vista como um conjunto de pontos equidistantes a uma reta no espaço.

E um plano? Qual é a sua lei de geração? Posso dizer que o elemento diretor é um ponto e a geratriz é uma reta que passa por esse ponto? Não, a reta vai girar em todas as direções, desse modo vai gerar o espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$), tenho que pensar em um modo de limitar essa reta para girar apenas no espaço bidimensional ($\mathbb{R}^2$).

Nas aulas de Geometria Elementar eu ouvi que um plano pode ser definido por 3 pontos não colineares. Se eu tomar a uma reta definida por dois pontos e um terceiro ponto não colinear como elementos diretores, e uma outra reta que passa pelo ponto diretor e por todas os pontos da reta diretriz eu tenho o plano. Sensacional!

Mas espera um pouco, eu estava tentando visualizar aqui e o problema é que parece que vai ficar um 'buraco' no plano que eu estou gerando. Faltam os pontos da reta paralela à reta diretriz que passa no ponto diretor. Já sei até como provar por absurdo que não forma um plano.

Chamemos a reta diretriz de d, o ponto diretor de P e a reta geratriz de g. Supondo que a lei de geração funciona para todos os pontos de uma reta r, paralela à d que passe pelo ponto P vai ser gerado por essa lei. Ou seja, todos os pontos de r são pontos de alguma posição da reta g (assim como todos os outros pontos do plano). O ponto P sempre é ponto de g, do mesmo modo que existe um ponto X que está em d e g ao mesmo tempo. Tomemos agora um ponto K de r diferente de P. Desse modo, K está em g porque ele é gerado pelo método, ou seja, se P, X e K pertencem a g então eles são colineares, mas ao mesmo tempo K e P estão em reta, K e X estão em outra, o que é um absurdo.

Vou mostrar essa prova no grupo do WhatsApp para discutir com o pessoal.

***

Ao questionar os garotos sobre o que sabiam sobre as curvas cônicas esperava que trouxessem inicialmente relações com a geometria analítica. Tamanha foi minha surpresa ao me deparar com a abordagem sintética descrita por William, na qual a ideia de cone remete à primeira explanação das cônicas, até então conhecida, pelo matemático grego Menecmo (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C., ao tratar da seção de um cone para obter três curvas. Apenas com Apolônio (262 – 190 a.C.) é que a superfície seccionada é abordada sobre a ótica de uma superfície gerada por uma reta (geratriz) apoiada em outra reta (diretriz) girando em torno desta mantendo o mesmo ângulo.

Tivemos a oportunidade também de discutir não apenas a geração de uma superfície cônica por duas retas concorrentes, como Apolônio, mas também, por outras leis de geração, a exemplo uma reta apoiada em uma circunferência e um ponto não coplanar a esse ponto. Outra discussão sobre o engendramento da superfície cônica foi a possibilidade de gerar a partir de duas circunferências e um ponto.

Foi notório que em determinado momento tanto os desenhos no quadro como as falas, escritas ou orais, eram insuficientes para visualizar a situação, levando alguns dos garotos a considerarem conjecturas como verdades sem validá-las. Neste sentido, procurei estar atento a essas situações e questioná-los sobre tais inferências, bem como trazer modelos que contribuísse na visualização. A exemplo o caso do engendramento da superfície cônica por duas circunferências. Ao tentarem esboçar a superfície (Figura 4) traçaram tangentes às circunferências para visualizar as geratrizes de contorno do cone. Contudo por tenderem a querer enxergar a uma superfície cônica não foi possível observar outras posições para a geratriz. Apenas quando utilizamos um programa computacional dinâmico de Geometria, no qual simulamos a situação (Figura 5), é que visualizamos que não se tratava de uma superfície cônica.

Figura 4: Desenho de um "pseudo cone" gerado por duas circunferências

Fonte: dos dados.

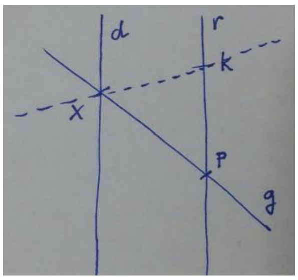
Figura 5: superfície gerada por duas circunferências

Fonte: dos dados.

Algumas incongruências foram também percebidas nas falas, quando, as vezes, apesar de falarem algo não coerente o contexto permitia o entendimento, contudo, em outras situações as incongruências verbais caracterizaram a fragilidade na compreensão de alguns conceitos.

A discussão sobre a geração das superfícies foi riquíssima, principalmente sobre a lei de geração de um plano. Além de discutirmos a contraprova por absurdo buscamos formalizar que tal lei não atendia ao paradigma euclidiano. Destaco que só consegui compreender a explicação após esboçar a situação no papel (Figura 6). Sendo a reta d e o ponto P elementos diretores, a reta g a geratriz que passa por P e por todos os pontos X de d, e K um ponto de g distinto de P e X, logo, P, K e X são colineares, todavia, quando g assume a posição de r, paralela a d, não é possível encontrar um ponto X colinear aos pontos K e P, visto que "euclidianamente" não existe interseção entre d e r.

Figura 6: Contraprova por absurdo



Fonte: dos dados.

Esta ocasião possibilitou introduzir alguns aspectos da Geometria Projetiva, como o princípio da continuidade, que será necessário para a generalização das curvas cônicas. Tomando o exemplo anterior, só há uma posição em que a reta *g* não intercepta a diretriz *d*, que é quando ela assume a posição de *r*, ou seja, paralela. Desconsiderando o quinto postulado de Euclides admitimos que duas retas supostamente paralelas se interceptam em apenas um ponto *X*, visto que duas retas concorrentes se cruzam em apenas um ponto. Tal ponto é dito impróprio por estar infinitamente afastado. Isto posto, podemos deduzir que uma reta possui apenas um único ponto impróprio. Sendo *X* impróprio um ponto da diretriz *d* e da geratriz *g*, quando esta está paralela à diretriz, a lei de geração é válida para a Geometria Projetiva.

Voltando a discussão sobre a geração de uma superfície cônica, explicitamos que sua geração é possível por uma geratriz reta concorrente a uma diretriz reta gira em torno desta sob um ângulo fixo, contudo foi destacado que o ângulo não pode ser maior que 0º e menor que 90º, pois geraria uma reta ou um plano respectivamente. Nesse desfecho, acabamos retomando a questão da lei de geração de um plano sob o paradigma euclidiano, descrevendo como lei a rotação de uma geratriz reta concorrente a uma diretriz reta perpendicular a esta.

Após a discussão, foi apontado que a Geometria Projetiva permite a generalização de algumas exceções da Geometria Euclidiana. Nesta direção, foi possível inclusive considerar a mesma lei de geração para uma superfície cilíndrica e cônica se considerarmos como elementos diretores um ponto e uma circunferência, e como geratriz uma reta apoiada no ponto e na circunferência. Sendo no caso da superfície cilíndrica o ponto diretor um ponto impróprio.

***

Considerações finais

Por meio do recorte da pesquisa de doutorado anteposto, busquei apresentar o modo como pretendo apresentar os dados no intuito de obter contribuições e sugestões de autores que me auxiliem na análise. Além da análise da matemática que se constitui no processo de investigação, a discussão perpassará por algumas questões secundárias que surgiram durante a pesquisa, tais como: como as mídias utilizadas interferiram no processo de emersão de inferências, conceitos e propriedades? Quais as dificuldades apresentadas no processo de formalização e sistematização? Que diferenças se apresentam na matemática emergente à investigação e na matemática sistematizada? No entanto, apesar de perpassar por essas questões o enfoque principal é no corpo matemático que se constitui ao longo da investigação.

Espero, com esta pesquisa, contribuir não apenas para uma discussão sobre o estudo das cônicas, mas também com metodologias de ensino, formação de professores e o uso das tecnologias na educação matemática.

Referências

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRITO, A. DE J. **Geometrias não-euclidianas:um estudo histórico pedagógico**. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

GARCEZ, A.; DUARTE, R.; EISENBERG, Z. Produção e análise de vídeogravações em pesquisas qualitativas. **Educação e Pesquisa**, v. 37, p. 249–262, 2011.

GARNICA, A. V. M. Filosofia da Educação Matemática: algumas resignificações e uma proposta de pesquisa. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999. p. 59–71.

LOPES, R. M. G. **Histórias de uma pesquisa(dora) em uma escola do campo com professores que lecionam Matemática.** 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagem qualitativas**. São Paulo: EPU, 1987.

MURPHY, C.; LICK, D. **Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning**. Califórnia: Corwin, 1998.

OLIVEIRA, A. G. **Memórias das aritiméticas de Emília: o ensino da aritmética entre 1920 e 1940**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2º. ed. Belo Horizonte - BH: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

QUEIROZ, S. M. **Movimentos que permeiam o devir professor de matemática de alguns licenciandos**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema. Boletim de Educação Matemática,** v. 14, p. 66–91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Tradução Orlando de Andrade Figueiredo; Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).