

Vetores e suas representações em livros didáticos de Engenharia

Celso Luiz Andreotti¹

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar, em livros didáticos das disciplinas das engenharias Mecânica e de Produção, quais são as abordagens conceituais e os registros de representações semióticas utilizados para o objeto vetor. Esta pesquisa está fundamentada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2011), que trata do funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática, por meio da produção, tratamento e conversão das representações semióticas. Verificaremos a produção e as transformações de tratamento e de conversão entre as representações apresentadas nos livros didáticos e o uso dos conhecimentos trigonométricos nas representações vetoriais utilizadas nas áreas técnicas. Analisaremos as articulações entre as representações - figurais, gráficas e simbólicas - utilizadas nas diferentes disciplinas. Nossas questões de pesquisa estão relacionadas à forma como é abordado o conceito de vetor, aos tipos de representações de vetores e às transformações de conversão apontadas nos livros didáticos destinados ao curso de Engenharia. Nossa pesquisa é documental, com metodologia baseada na análise de conteúdo segundo Bardin (1977). Escolhemos oito livros utilizados em três instituições de ensino para a coleta e análise de dados. Identificamos que algumas representações vetoriais, privilegiadas em livros de Matemática, não são as mais utilizadas, necessariamente, nos livros técnico-científicos, ao contrário do que ocorre com a representação em registro simbólico, de base trigonométrica, amplamente utilizada nas engenharias. Concluímos que as representações e as variadas notações e simbologias não são completamente convergentes quando se trata da abordagem de vetores e podem gerar dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem deste objeto.

Palavras-chave: Vetores. Representações. Tratamento. Conversão. Livros didáticos.

1 Introdução

O conceito de vetor está presente em diversas disciplinas do curso de Engenharia, como a Física, Mecânica Aplicada, Mecânica Geral, Resistência dos Materiais, entre outras, nas quais este conceito é relevante e diversamente explorado. O interesse por esta pesquisa é devido ao grande valor e ampla aplicação dos vetores na Engenharia e, especialmente, às observações cotidianas das dificuldades apresentadas por muitos alunos quando lidam com o objeto matemático vetor, em razão da exigência do domínio de alguns conceitos básicos da Matemática, como a Trigonometria, e da variedade de representações para o vetor. Nesse sentido, Bittar (2011) discutiu, em sua pesquisa de doutorado na França, algumas dificuldades de alunos relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor. Apontou que a

¹ Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo- UNIAN, e-mail: celso.andreotti@hotmail.com, orientadora: Maria Elisa Esteves Lopes Galvão.

multiplicidade de representações semióticas presentes no ensino do conceito de vetor e a necessidade de se transitar entre essas representações são motivos de muitas dificuldades por parte dos estudantes.

O conceito de vetor é apresentado pela primeira vez ao estudante no Ensino Médio (EM), na disciplina de Física, por meio do paralelogramo de forças e, posteriormente, em anos iniciais de alguns cursos universitários, nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por exemplo. As representações deste objeto são bastante variadas e pertencem aos registros em língua natural, simbólicos, figurais e gráficos, a partir dos quais podemos ter representações figurais, gráficas e simbólicas (neste caso, em particular, com o uso de trigonometria, de coordenadas de uma base ortogonal ou ainda, com uso de matrizes. Basicamente, temos a conceituação e a representação de vetor em dois pontos de vista, o da Física, muito utilizada na Engenharia e, por outro lado, o da Matemática. Em meio a essas vertentes, encontra-se o estudante que precisa dominar esses conhecimentos e saber transitar entre as representações existentes.

Nossa pesquisa se fundamenta na teoria dos Registros de Representações Semióticas Duval (2011), que trata do funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática, por meio da produção, tratamento e conversão das representações semióticas e pretende:

- Verificar quais são as formas de registros de representação semiótica existentes nos livros didáticos e, identificar as conversões utilizadas nos livros-texto;
- Comparar as formas de representações para os vetores adotadas em livros-texto das diferentes disciplinas;
- Investigar como os vetores são utilizados na resolução de problemas específicos nas diversas disciplinas da engenharia e, como são tratados os conhecimentos trigonométricos aplicados na representação vetorial.

É necessário investigar como os autores lidam, em seus livros didáticos, com a diversidade de registros de representações semióticas existentes para os vetores levando em consideração as três atividades cognitivas propostas por Duval (2011): a produção, o tratamento e a conversão das representações, buscando respostas para algumas questões de pesquisa:

- Como é abordado, nos livros didáticos das diversas disciplinas científicas de Engenharia, o conceito de vetor e, como são utilizados para a resolução de problemas?

- As conversões entre representações semióticas de vetores são apontadas nos livros didáticos?
- Como a Trigonometria e outros conceitos matemáticos estão relacionados à representação dos vetores em tais livros?

Realizamos uma pesquisa de caráter documental e o levantamento de dados foi feito exclusivamente a partir de livros didáticos das diversas disciplinas da Engenharia Mecânica e da Engenharia de Produção, presentes em Planos de Ensino e Aprendizagem (PEA) do Ensino Superior (ES) de alguns cursos de Engenharia de instituições públicas e privadas, do estado de São Paulo, com o objetivo geral de identificar e analisar quais as abordagens e formas de representação de vetor adotadas pelos autores.

2 Revisão de Literatura

Para a revisão de literatura, identificamos pesquisas, no âmbito da Educação Matemática, relacionadas com o objeto matemático vetor e a forma particular trigonométrica de representação, com ênfase na abordagem do conceito de vetor e de suas representações e outros aspectos utilizados nos livros didáticos voltados para os cursos de Engenharia.

Para o foco principal, que são os vetores e suas representações semióticas, identificamos quatro pesquisas alinhadas com nosso tema. Castro (2001), em sua dissertação, tratou da noção de vetor no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, a partir da concepção, realização e análise de uma sequência didática que teve por objetivo explorar a articulação entre os registros de representações de vetores. A pesquisa de Patrício (2011) tratou das dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática, com relação à produção, ao tratamento e à conversão das representações semióticas de vetores. Watson, Spirou e Tall (2003) trataram da importância, dentro da aprendizagem de vetores, da convergência dos fenômenos físicos e do simbolismo matemático para a conceituação deste objeto com foco na ideia de que o efeito físico sentido é uma forma mais significativa de conceituar vetor para o aluno. Poynter e Tall (2005) trataram dos diferentes pontos de vista, da Física e da Matemática, para estabelecer uma boa forma de conceituar vetor para os estudantes.

Para a representação trigonométrica de vetores, amplamente explorada nas disciplinas das Engenharias, analisamos o artigo de Lima, Sauer e Sartor (2011), que tratou da importância da interação das ciências da Engenharia junto aos professores e aos alunos do Ensino Médio (EM), por meio da realização de oficinas de Matemática, entre as quais uma de Trigonometria, evidenciando sua importância para as representações de vetores.

Observamos nos trabalhos escolhidos, os vários aspectos relacionados com a produção, o tratamento e a conversão entre as múltiplas representações semióticas de vetores e constatamos sua relevância. Assim, com subsídios adquiridos, buscamos nos livros didáticos da Engenharia, as questões relacionadas com a complexidade do objeto vetor em seus principais registros de representações semióticas e a articulação entre as representações.

3 Referencial teórico

Os objetos matemáticos são puramente abstratos, existem apenas como ideias e, com isso necessitam de uma representação semiótica para serem compreendidos e manipulados. As representações semióticas encontradas em livros didáticos para tratar de vetor, das operações, dos tratamentos e das conversões realizadas entre as diferentes representações, levam à escolha da “Teoria dos Registros de Representações Semióticas” de Raymond Duval (2011).

Parte do sucesso no processo de aprendizagem depende da capacidade do estudante em saber lidar com as diversas estruturas matemáticas e com as muitas formas possíveis de representações para um mesmo objeto. Conforme Duval (2011, p.15) “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos duas representações semióticas”. De acordo com o autor, os registros de representações semióticas podem ser classificados em quatro grupos distintos, como veremos no quadro 01.

Os tratamentos algoritmizáveis são aqueles para os quais conseguimos estabelecer um conjunto de regras lógicas que deem conta da solução de um determinado problema e tratamentos são transformações das representações semióticas dentro de um mesmo sistema semiótico. Os registros multifuncionais ou plurifuncionais, como definiu Duval (2011), são aqueles cujos tratamentos não são algoritmizáveis e são utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento humano, como a língua natural, aplicada em toda a ciência para situações particulares. Já considerando os registros monofuncionais, tratam-se de registros principalmente algoritmizáveis, ou seja, são registros concebidos com uma simbologia própria, da qual se dispõe para a resolução de problemas matemáticos, tais como os sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas e de cálculos gráficos, por exemplo. Quanto aos registros terem funções discursivas ou não discursivas, nos remete a dizer simplesmente se os registros mobilizados são de uma linguagem textual ou se são representados por figuras geométricas ou gráficos, respectivamente.

Quadro 01: Classificação dos diferentes registros.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural: associações verbais.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas, algébricas, simbólicas, cálculo.	Gráficos cartesianos: mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2011, p.14.

A seguir, exemplificamos os vários tipos de registros disponíveis considerando os vetores:

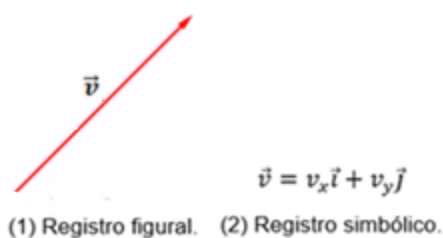
- Registros da língua natural: “vetor com comprimento de dez unidades, paralelo ao eixo das abscissas e sentido positivo”.
- Registros simbólicos: Representação algébrica de um vetor no plano: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$
- Registros figurais: O vetor representado pelo segmento orientado \overrightarrow{AB} .
- Registros gráficos: O vetor \vec{v} no plano cartesiano.

Dentro da atividade matemática Duval (2011) considera dois tipos de transformações que são realizadas para as representações semióticas: o Tratamento e a Conversão. A conversão é a transformação de uma representação semiótica para outra forma distinta, consistindo na mudança de tipo de registro, porém, preservando a referência ao mesmo objeto matemático em questão. Ressalta-se o fato importante de que os sentidos da conversão não são transformações equivalentes, ou seja, a conversão de um registro figural, por exemplo, para um registro algébrico pode não ter o mesmo grau de dificuldade que o caminho inverso. Na figura 1, a parte (1) é a representação de um vetor em registro figural e, a parte (2) a representação do mesmo vetor em registro simbólico. Mudar de (1) para (2), ou vice-versa, é uma conversão. Para Duval (2011) os registros de representações de um determinado objeto matemático não têm em si as mesmas informações contidas em cada uma das

representações disponíveis, por isso a razão da articulação entre esses registros ser condição para a apreensão de um conceito.

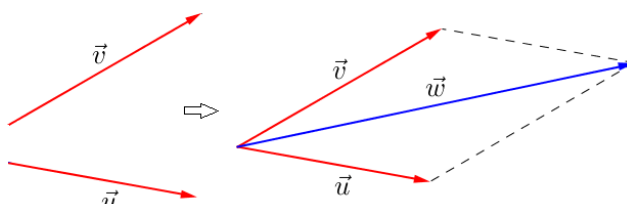
O Tratamento ocorre quando as transformações de representações do objeto acontecem dentro do mesmo sistema semiótico. Exemplificando, consideremos a adição de dois vetores \vec{u} e \vec{v} dentro do mesmo sistema semiótico (figural), conforme verificamos na figura 2. Os registros de representação, com seus elementos cognitivos de produção, tratamento e conversão se mostram essenciais no processo de ensino e de aprendizagem. Identificaremos em livros didáticos da Engenharia, a ênfase ou não com relação à produção dos registros de representação, no tocante às suas notações e símbolos apropriados, e quais as transformações existentes, tratamento e conversão, e verificar se há privilégio de uma em detrimento da outra.

Figura 1: Duas representações distintas de um mesmo vetor no plano.



Fonte: Acervo pessoal.

Figura 2: Tratamento: a adição de $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ no registro figural.



Fonte: Acervo pessoal.

4 Procedimentos metodológicos

Vamos investigar e analisar os registros de representação de vetores e suas aplicações em atividades propostas nos livros didáticos de algumas disciplinas técnicas e de Matemática das Engenharias Mecânica e de Produção que abordem este objeto. A pesquisa é de caráter documental (Gil, 2002), por se tratar de fontes primárias, uma vez que estes livros ainda não receberam nenhum tratamento analítico com esse propósito antes. A coleta e análise de dados serão delineadas a partir do método de análise de conteúdo proposta por Bardin (1977), de maneira adaptada e própria a esta pesquisa. Divide-se em três fases:

4.1 Pré-análise: É a fase de estruturação e organização daquilo que será analisado. Os livros foram selecionados conforme as indicações nos Planos de Ensino e Aprendizagem das disciplinas da Engenharia de algumas universidades públicas e privadas. Selecionamos três livros, um de Física, um de Matemática e um de disciplina técnica, conforme o quadro 2.

Quadro 02: Livros didáticos por disciplinas e as respectivas instituições de ensino superior.

Livro	Disciplina	Livro/autor	Instituição de Ensino Superior
01	Álgebra Linear	Geometria Analítica – um tratamento vetorial. 3ª ed. 2005. Camargo, I; Boulos, P. (1ª edição, 1986)	Anhanguera, Mackenzie, USP
02	Física Geral I (Física I)	Fundamentos de Física. Vol.1, 9ª ed. 2012. Halliday, D; Resnick, R.; Walker, J., (1ª edição, 1960)	Anhanguera, Mackenzie, USP
03	Mecânica Geral (Estática)	Estática. Mecânica para engenharia. 12ª ed. 2011. Hibbeler, R. C., (1ª edição, 1974)	Anhanguera, Mackenzie, USP

Fonte: Acervo pessoal.

4.2 A exploração do material: Verificaremos qual o conceito de vetor e os registros de representação nos livros de Matemática e das disciplinas técnicas da Engenharia.

4.3 Tratamento dos resultados obtidos e interpretação: Nossa análise está enquadrada na categoria qualitativa.

A análise de conteúdo apresentada por Bardin (1977) e adaptada a nossa pesquisa, ajuda a organizar, a delimitar e a estabelecer parâmetros que facilitam nossa investigação e a obtenção de respostas para as nossas questões de pesquisa e ao processo de inferência.

5 Análise dos livros didáticos

Apresentaremos os dados e as análises feitas sobre os conteúdos dos livros didáticos de Engenharia selecionados, conforme critérios já estabelecidos. Investigaremos quais são os registros de representações semióticas existentes e quais transformações são realizadas entre as representações, de acordo com a teoria dos Registros de Representações

Semiótics, Duval (2011). Observamos, nos livros de Matemática, Física e Engenharia selecionados, que alguns símbolos e notações adotados diferem, como por exemplo:

- Nos livros de Matemática: $\|\vec{v}\|$ significa “norma ou módulo do vetor \vec{v} ”;
- Nos livros de Física: \vec{v} é o “vetor v ” e, v (sem a seta) denota o módulo do vetor;
- Nos livros de Engenharia: \mathbf{v} em “negrito” identifica o vetor e, v sem negrito o seu módulo.

O conceito de vetor é abordado no livro 1 de forma intuitiva e utiliza a representação em registro figural, figura 3. Com a representação de uma força por meio de uma flecha se estabelece as noções iniciais de vetor, dizendo que duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor. No livro 2, o autor também utiliza a representação de vetores em registro figural (figura 4), e mostra de forma indireta a ideia de equipolência de segmentos orientados e, afirma que um representante de um vetor pode ser deslocado sem que seja

Figura 3: Representação em registro figural de um vetor.

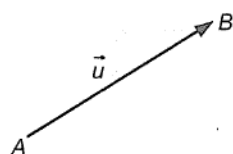
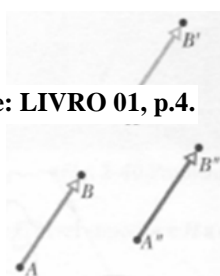


Figura 4: Representantes de um mesmo vetor.



Fonte: LIVRO 01, p.4.

Figura 5: Representação em registro figural de vetor e seus elementos.



Fonte: LIVRO 02, p.40.

Fonte: LIVRO 03, p.11.

Há algumas pequenas diferenças nas representações geométricas nos três livros: o livro 2 destaca os pontos inicial e final, enfatizando a ideia de translação entre os pontos e, os elementos de intensidade, direção e sentido são destacados na representação no livro 3.

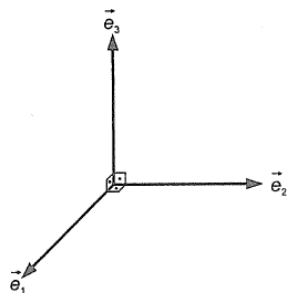
representações geométricas nos três pontos inicial e final, enfatizando a ideia

Outra representação de vetor descrita no Livro 01 (Matemática) é a representação em registro simbólico, baseada em coordenadas definidas a partir da escolha de uma base qualquer $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de um espaço vetorial V^3 , com a qual se pode definir as coordenadas dos vetores deste espaço vetorial, ou seja, existem escalares ou números reais

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ de tal forma que a representação de um vetor \vec{v} a partir desta base é dada por: $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Pode-se escolher uma base *ortogonal* $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ na qual $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são ortogonais entre si ou *ortonormal* se $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são unitários e ortogonais entre si, figura 6.

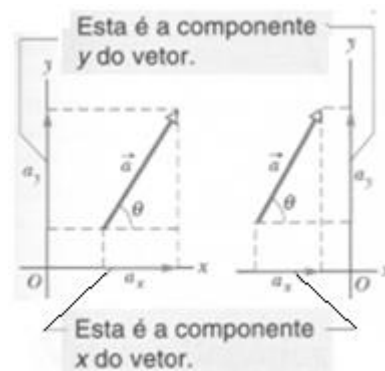
Utiliza-se na Física (livro 2), figura 7, a representação em registro simbólico, na qual, a partir de um sistema de coordenadas ortogonal, se faz a decomposição dos vetores nos eixos coordenados $\mathbf{O}_x, \mathbf{O}_y, \mathbf{O}_z$ (ou $\mathbf{O}_x, \mathbf{O}_y$, no caso de vetores num plano) com auxílio de trigonometria básica, e obtém-se as componentes com as expressões $a_x = a \cdot \cos\theta$ e $a_y = a \cdot \sin\theta$, sendo θ o ângulo entre o vetor \vec{a} e o semieixo x positivo e, o vetor \vec{a} fica representado pela soma $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Em coordenadas numa base ortonormal $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ o vetor \vec{a} fica representado, no plano, por $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ ou no espaço por $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$.

Figura 6: Base ortonormal.



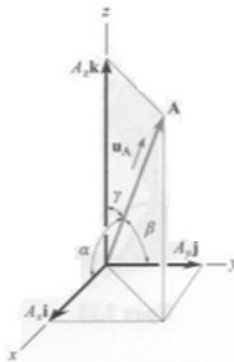
Fonte: LIVRO 01, p.58.

Figura 7: Decomposição de um vetor no plano.



Fonte: LIVRO 02, p.43.

Figura 8: Componentes na base ortonormal (i, j, k)



Fonte: LIVRO 03, p.31.

No livro 3, da Engenharia, a representação em registro simbólico, com uso de trigonometria, é semelhante, porém, com outros elementos envolvidos, como as leis dos senos e cossenos e semelhança de triângulos. Neste livro, a representação do vetor \vec{a} , figura 8, por meio da base ortonormal $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ é, segundo a notação do autor, $\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$. Voltando à figura 8, vemos, de certa forma, um processo de passagem da representação em registro gráfico para o simbólico (trigonométrico) e, posteriormente para coordenadas da base ortonormal, caracterizando uma transformação de conversão. No livro 1, figura 9, as projeções ortogonais e a norma do vetor, são obtidas com as expressões:

Projeção de \vec{v} na direção de \vec{u} : $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$; Norma de \vec{p} : $\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$

Figura 9: Projeção de um vetor \vec{v} na direção de \vec{u}



Fonte: LIVRO 01, p.82.

Notamos que as representações simbólicas assumem, nos três livros, contornos um pouco distintos, como por exemplo, na representação em base ortogonal, o livro 1 utiliza a simbologia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$; o livro 2 usa a simbologia $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, enquanto que o livro 3 considera (i, j, k) , todos com a mesma finalidade de representar os vetores unitários. Outras diferenças se encontram na forma como as projeções de um vetor são obtidas nos livros de Matemática e nos livros de Física e de Engenharia, no primeiro, as projeções e norma são obtidas a partir do conceito de produto escalar, conforme já apresentado, enquanto que nos dois últimos, as projeções são obtidas por meio das razões trigonométricas **seno e cosseno** e também pelas **leis dos senos e cossenos**, que fazem parte da representação em registro simbólico, com uso de trigonometria, muito frequente na Engenharia. O livro 1, de Matemática, não dá ênfase à representação em registro simbólico, com base trigonométrica, muito útil para as áreas técnicas, conforme o exemplo da figura 10, do livro 3. Notamos ainda nesta figura, um processo de passagem do registro gráfico para o simbólico, de base trigonométrica, e para o simbólico, usando a base ortonormal do plano, que sob certo aspecto, pode ser considerado uma conversão (da representação gráfica para a simbólica), embora seja num único sentido.

Figura 10: Resolução de exercício usando registros de representações distintos para vetor.

Exemplo 2.6

O olhal da Figura 2.19a está submetido a duas forças F_1 e F_2 . Determine a intensidade e direção da força resultante.

Notação escalar $\rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_x$; $F_{Rx} = 600 \cos 30^\circ \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N} = 236,8 \text{ N} \rightarrow$
 $\leftarrow F_{Ry} = \Sigma F_y$; $F_{Ry} = 600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N} = 582,8 \text{ N} \leftarrow$

A força resultante, mostrada na Figura 2.19c, possui uma intensidade de:

$$F_R = \sqrt{(236,8 \text{ N})^2 + (582,8 \text{ N})^2} = 629 \text{ N}$$

Da adição vetorial,

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{582,8 \text{ N}}{236,8 \text{ N}} \right) = 67,9^\circ$$

Notação vetorial cartesiana

Da Figura 2.19b, cada força é expressa como um vetor cartesiano:

$$F_1 = \{600 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 600 \sin 30^\circ \mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$F_2 = \{-400 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 400 \cos 45^\circ \mathbf{j}\} \text{ N}$$

Assim,

$$F_R = F_1 + F_2 = \{236,8 \mathbf{i} + 582,8 \mathbf{j}\} \text{ N}$$

A intensidade e a direção de F_R são determinadas da mesma maneira mostrada acima.

Figura 2.19 (a) (b) (c)

Fonte: LIVRO 03, p.25.

6 Conclusão

Nos capítulos iniciais do livro 1 são apresentadas as representações para vetores, em seus registros gráfico e simbólico, no entanto, não foi observada nenhuma ênfase em fazer passagens de um registro para outro, por exemplo, do registro figural para o registro simbólico e vice-versa. As atividades exploraram bem os conceitos teóricos apresentados, dentro do mesmo sistema de representação semiótico, quase que exclusivamente com transformações de tratamento, porém, não consideram a conversão. Neste livro, a representação simbólica com base trigonométrica é praticamente inexistente, ficando relegada, o que gera um certo descompasso com as aplicações na área técnico-científica. No livro 2, são apresentados os registros de representações de vetor, pela ordem, figural, gráfico, simbólico de base trigonométrica e na base ortogonal (\hat{i} , \hat{j} , \hat{k}), com os respectivos passos para efetuar a transição de uma representação para outra, denotando uma transformação de conversão, embora em um único sentido. Nesse livro não há formalismo matemático nas definições e, as notações e os símbolos utilizados diferem dos utilizados nos livros de Matemática e, também, dos próprios livros da Engenharia, como por exemplo, a base ortonormal identificada, respectivamente nos três livros como, $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e (i, j, k) . A representação trigonométrica tem grande relevância e é aplicada ao longo de todo o livro 2.

No livro 3, de maneira bastante objetiva e prática, o autor articula e transita entre as representações semióticas de vetor mostradas neste livro, embora mantenha sempre o mesmo sentido para a transformação de conversão, qual seja da representação em registro figural e gráfico para o registro simbólico de base trigonométrica (denominada, pelo autor, de notação escalar) e desta para a representação em coordenadas da base ortogonal (i, j, k) (denominada, pelo autor, de notação vetorial cartesiana). A essas transformações de conversão, acrescentam-se outras componentes de conhecimento matemático, tais como semelhança de triângulos, conceitos de vetor posição e coordenadas de ponto, por exemplo, conferindo às operações maior complexidade, seja na conversão ou mesmo no tratamento das representações, que pode ser observada nos exercícios. Não há formalismo matemático e a noção de equipolência, importante para o entendimento do conceito de vetor e das próprias leis do triângulo e paralelogramo, não são abordadas. A diversidade de representações disponíveis para vetores associada às notações e também aos variados símbolos adotados pelos livros, também conferem maior complexidade ao objeto matemático vetor e conseqüentemente ao seu aprendizado. Verifica-se, portanto, que há necessidade de maior ênfase aos aspectos positivos inerentes à transformação de conversão e maior uniformidade e convergência no uso dos símbolos empregados nos livros de Matemática, Física e das disciplinas da Engenharia.

6 Referências Bibliográficas

- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa, Portugal: Edições 70, 1977.
- BITTAR, M.O **Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica**. In: MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 71-94.
- CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica – um tratamento vetorial**. 3ª ed. - São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- CASTRO, Samira Choukri de. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. São Paulo: 2001. 111p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP.
- DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2011. p. 11-33.
- GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. - São Paulo: Atlas, 2008.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 1: mecânica**. 9ª ed. – Rio de Janeiro: GEN LTC, 2012.

HIBBELER, R.C. **Estática: Mecânica para Engenharia**. 12^a ed. – São Paulo: PEARSON, 2011.

LIMA, Isolda G.; SAUER, Laurete Z.; SARTOR, Solange G. **Oficinas de Matemática no projeto Engenheiro do Futuro: aproximando as escolas de Ensino Médio e as de Engenharia**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, art.1931, 2011, Blumenau, Santa Catarina, 2011.

PATRÍCIO, Rafael Silva. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Belém: 2011. 103p. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará – PA.

POYNTER, A. e TALL, D. **What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching**. Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick: 2005. pp. 128-135.

WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. **The Relationship Between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector**. The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1(2): 2003. p.73-97.