

Um estudo sobre o conceito de limite à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática

Gabriel de Oliveira Soares¹

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

O objetivo da pesquisa aqui resumida é analisar os conceitos de limite de uma função, bem como os métodos de resolução de questões apresentados por estudantes de cursos de graduação, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Busca-se compreender quais características dos Três Mundos da Matemática – corporificado, simbólico e formal – propostos por Tall (2004; 2013) estão mais presentes na visão de alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática acerca do conceito de limite, fundamental para o trabalho das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior. Para tal, inicialmente serão analisados livros didáticos de Cálculo presentes na bibliografia da disciplina de Cálculo I dos cursos, com o intuito de compreender a abordagem deste material, tendo em vista o quadro teórico. Após esta etapa, será aplicado um teste composto por questões dissertativas com os alunos destes dois cursos de licenciatura, em que, por meio da análise da produção dos acadêmicos, pretende-se verificar o a influência destas bibliografias na formação dos estudantes e ainda, se as imagens conceituais dos alunos acerca do conceito de limite são ricas em aprendizagens ou apenas pautadas na reprodução de técnicas de resolução, gerando assim, discussões sobre os objetivos das disciplinas de Cálculo nos cursos de formação de professores.

Palavras-chave: limites; Três Mundos da Matemática; Cálculo Diferencial e Integral; formação de professores.

Introdução

A problemática do ensino do Cálculo Diferencial e Integral nas instituições de ensino superior é um tema bastante presente em estudos da área de Educação Matemática. Deve-se a este fato à alta complexidade dos tópicos matemáticos abordados ao trabalhar com este conteúdo, levando em consideração que o Cálculo é um dos primeiros conteúdos de nível superior abordados nos cursos de licenciatura e engenharias, por exemplo.

Artigue (1995, p. 107), destaca que esta complexidade se origina de diversos fatores, mas que ela divide em três grandes grupos,

¹ Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, e-mail: gabriel.soares@unifra.edu.br, orientador: Dra. Helena Noronha Cury.

- Aquelas associadas com a complexidade dos objetos básicos do cálculo (números reais, sucessões, funções e ao fato de que esses objetos se conceitualizam plenamente quando se inicia um ensino do cálculo que vai contribuir de forma forte com tal conceitualização).
- Aquelas associadas à conceptualização e à formalização da noção de limite, centro do campo do cálculo.
- Aquelas vinculadas às rupturas necessárias com relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiares, e às especificidades do trabalho técnico no cálculo. (Tradução nossa).

De mesma forma, a busca pela compreensão de como se dá a aprendizagem em Matemática sempre foi um objeto de estudo bastante presente nas pesquisas em Educação, nas mais diferentes épocas da história. Tall (2013, p. 8-10) cita trabalhos como os de Piaget, Bruner, Fischbein e Van Hiele, que contribuíram para entender todos os processos cognitivos dos quais se tem conhecimento hoje em dia.

Entretanto, todas estas teorias do desenvolvimento do pensamento passam por releituras, aperfeiçoamentos, apropriações e discussões no decorrer do tempo, sempre buscando melhor compreender a aprendizagem. E, nesta perspectiva, surge a Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2004; 2013) com o intuito de classificar a aprendizagem em três linhas de pensamento, chamadas por ele de “mundos”: o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico e o mundo axiomático formal.

Desta forma, a compreensão da aprendizagem matemática deixa de ser pautada por uma única perspectiva e passa a ser compreendida de maneira mais ampla. Tall (2013, p. 17) remete a este fato ao afirmar que cada um dos mundos tem seu próprio modo de operação, suas qualidades específicas, mas que eles agem de maneira integrada e que a abstração das definições e deduções dos dois primeiros mundos pode levar à compreensão dos conceitos no desenvolver do mundo axiomático formal. Assim, a aprendizagem em matemática atinge seu ponto alto quando um sujeito for capaz de deduzir e realizar provas formais, sobre cada um dos conceitos.

Assim, levando em consideração este quadro teórico, a preocupação com o processo de entendimento e apropriação dos conceitos do Cálculo no nível superior e ainda, os grandes índices de reprovação nessas disciplinas, evidenciados em trabalhos como os de Rezende (2003) e Molon (2013), surge o projeto de pesquisa intitulado “Um estudo sobre o conceito de limite à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática” que visa compreender quais características desses três mundos propostos por Tall (2004; 2013)

estão mais presentes na visão de alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática no que tange à construção do conceito de limite.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar e refletir sobre a proposta do projeto de pesquisa, pelo qual se pretende verificar as imagens conceituais dos alunos sobre o tópico de limite de uma função, a partir da análise resolução de questões dissertativas envolvendo o tema.

A Teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall

Tall (2008) propõe a Teoria dos Três Mundos da Matemática baseada em uma fundação sensório-motor-lingüística, em que o reconhecimento de padrões, semelhanças e diferenças, a repetição sequências de ações até que se tornem automáticas e a linguagem para descrever e aperfeiçoar a maneira como pensamos sobre as coisas, aliados ao conceito de *met-before*, que seriam as aprendizagens prévias sobre o conteúdo, são essenciais na compreensão de novas problemáticas. Sobre isto, o autor afirma que,

O pensamento matemático envolve a *compreensão* das estruturas matemáticas em *conceitos pensáveis* conectados em *estruturas do conhecimento* que são *misturados* juntos, levando aos sofisticados *conceitos cristalinos* que possuem uma inevitável estrutura matemática (TALL; 2013, p. 133, grifo do autor, traduzido).

Nesse sentido, a proposta dos Três Mundos da Matemática possibilita a análise do desenvolvimento do pensamento matemático desde a sua forma mais básica, no mundo corporificado, até o pensamento matemático mais completo, no mundo formal, analisando também os processos de transição para cada um destes mundos.

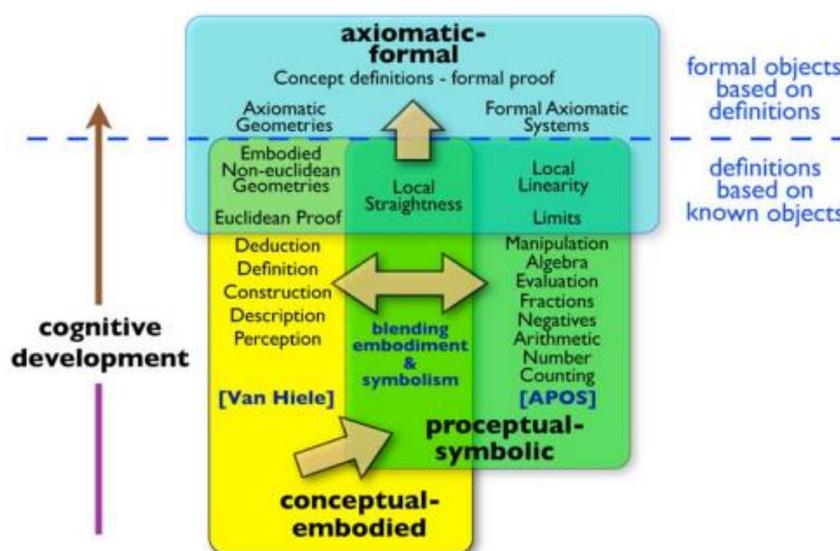
Em uma breve descrição do que seriam os Mundos da Matemática, estes serão definidos de acordo com Tall (2008):

- O Mundo Conceitual Corporificado é baseado na percepção e reflexão sobre as propriedades dos objetos, inicialmente vistos no mundo real mas, em seguida, abstraídos para o pensamento humano;
- O Mundo Proceitual Simbólico cresce fora do mundo corporificado, incorporado por meio de ação (como contagem) e é simbolizado através de conceitos pensáveis (tais como número) que funcionam tanto como processos para fazer e como conceitos para pensar (proceitos);

- O Mundo Axiomático-Formal se baseia nas definições e provas matemáticas, em que se inverte a sequência da construção do conhecimento, partindo-se de definições com base em objetos conhecidos para chegar em conceitos formais baseados em definições.

Com objetivo de compreender um pouco sobre cada um dos Três Mundos da Matemática, Tall (2008) propõe um quadro, visto na Figura 1, que explica como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático.

Figura 1: Quadro Teórico “Os Três Mundos da Matemática”



Fonte – Disponível em: <http://math4teaching.com/2013/01/22/the-three-worlds-of-mathematics/>. Acesso em 10 out 2016.

Desta forma, os estudos nos Mundos Corporificado e Simbólico levam o sujeito ao desenvolvimento do pensamento formal. Entretanto, isto não quer dizer que o desenvolvimento é linear, passando de um mundo para outro. Para Tall (2004), cada sujeito estabelece uma jornada durante o seu desenvolvimento matemático, traçando seu próprio caminho pelos Mundos da Matemática.

Outros conceitos essenciais na teoria proposta por Tall são os “met-before” e os “met-after”, traduzidos por Lima (2007) como já-encontrados e a-encontrar. Os Já-encontrados são definidos como toda e qualquer experiência anterior a certo aprendizado, os pré-requisitos, considerados como uma construção mental, presentes na imagem de conceito do aluno, que possam interferir no aprendizado. Já os a-encontrar devem ser entendidos como as experiências atuais de aprendizagem que interfiram em aprendizado

anterior, que podem não ser ainda parte da imagem de conceito do aluno, mas podem tanto modificá-la quanto vir fazer parte dela, tornando-se assim, já-encontrados (LIMA, 2007).

Logo, ao pautar-se no quadro teórico proposto por Tall (2004; 2013), que oferece uma visão do desenvolvimento do pensamento matemático levando em consideração diversos fatores, entre eles a influência dos conhecimentos prévios dos alunos, esse autor afirma que “os professores estarão buscando necessárias alternativas de formas de ensino e aprendizagem que permitem a diferentes alunos, desenvolver sua própria visão sobre a matemática, conduzindo-o a um sentido pessoal da matemática de formas coerentes” (TALL, 2013, p. 416).

Metodologia

Levando em consideração o objetivo geral do projeto e, em consonância com estudos já realizados envolvendo este quadro teórico, crê-se que uma abordagem qualitativa possibilitará que a pesquisa tenha maior relevância para o pesquisador. Minayo (2001) destaca que, na pesquisa qualitativa, se trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que equivale a uma gama maior de relações entre processos e fenômenos, e nesse sentido, uma simples operacionalização de variáveis não seria a melhor abordagem a se realizar.

Desta forma, ao buscar compreender quais características dos Três Mundos da Matemática estão mais presentes na visão de alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática acerca do conceito de limite, se aplicará um teste com questões dissertativas que abordarão a definição, desenvolvimento do conceito, visualização gráfica, tabular e ainda, aplicações de limite de funções a situações diversas. Acredita-se que, ao observar as estratégias de resolução de questões apresentadas por eles, será possível compreender quais características destes mundos estão mais presentes nas imagens conceituais dos alunos.

É válido destacar que estarão aptos ao estudo alunos que já tenham cursado a disciplina de Cálculo I, apresentada no segundo e terceiro semestre dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições participantes. Também, não serão realizadas distinções entre os participantes das duas instituições, com intuito de garantir a confidencialidade e transparência do trabalho proposto.

Entretanto, previamente à aplicação dos testes, serão analisados livros didáticos de Cálculo presentes na bibliografia da disciplina de Cálculo I dos dois cursos de graduação, com o intuito de conhecer a abordagem trabalhada nestes livros ao desenvolverem o conceito de limite e ainda, compreender os conceitos necessários para a aprendizagem dos conceitos. De mesma forma, serão analisados alguns exercícios propostos nestas bibliografias a fim de perceber quais características dos Três Mundos os alunos poderão desenvolver ao trabalharem com determinados exercícios, pois compreende-se que estes se refletem diretamente na aprendizagem dos tópicos do Cálculo no contexto universitário.

Portanto, após a análise dos livros, partir-se-á para o estudo de campo em que, com a análise dos dados, poderá ser possível perceber como se desenvolveu a compreensão do conceito de limite pelos alunos e se estes alunos possuem boas imagens conceituais deste conceito.

Resultados Iniciais

A análise do desenvolvimento do conceito de limite nos livros de cálculo

Como citado anteriormente, foram analisados os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC's) das duas instituições de ensino participantes para verificar que livros estavam presentes na bibliografia da disciplina de Cálculo I nos cursos de Licenciatura em Matemática, sendo que a obra “Um curso de Cálculo”, de Hamilton Guidorizzi é coincidente nas duas bibliografias.

No trabalho com os livros didáticos, será analisado o capítulo dedicado à introdução e desenvolvimento do conceito de limite, em busca de compreender como se dá esta abordagem; quais "já-encontrados" fazem parte e são necessários para a compreensão destes conceitos; e quais características dos Três Mundos da Matemática são evidenciadas a um aluno que estuda por este capítulo. Também serão analisados os exercícios propostos nos livros, a fim de perceber que estratégias o aluno precisa desenvolver ao resolver as questões e como estas estão relacionadas aos Três Mundos da Matemática. Assim, a análise será feita em duas etapas: a etapa de análise do conceito e a etapa de análise dos exercícios.

O Quadro 1 apresenta as questões propostas ao analisar o capítulo do desenvolvimento do conceito de limite, baseadas em Mação (2014), tanto para o trabalho com o conceito, quanto para a análise dos exercícios.

Quadro 1: Questões propostas para a análise dos livros didáticos.

Questões propostas para a análise do conceito	Questões propostas para a análise dos exercícios
<ul style="list-style-type: none">• Como é feita a introdução do conceito de limite?• Como é desenvolvido o conceito de limite através dos exemplos apresentados?• Quais “já-encontrados” são necessários e utilizados para a compreensão do conceito de limite?• Quais características da Teoria dos Três Mundos da Matemática estão evidenciadas na abordagem do livro e que o aluno poderá desenvolver ao estudar por ele?	<ul style="list-style-type: none">• Qual é o objetivo do exercício?• Quais “já-encontrados” são necessários e utilizados para a resolução deste exercício?• As estratégias de resolução do exercício possibilitam o desenvolvimento das características de quais mundos da Teoria dos Três Mundos da Matemática?

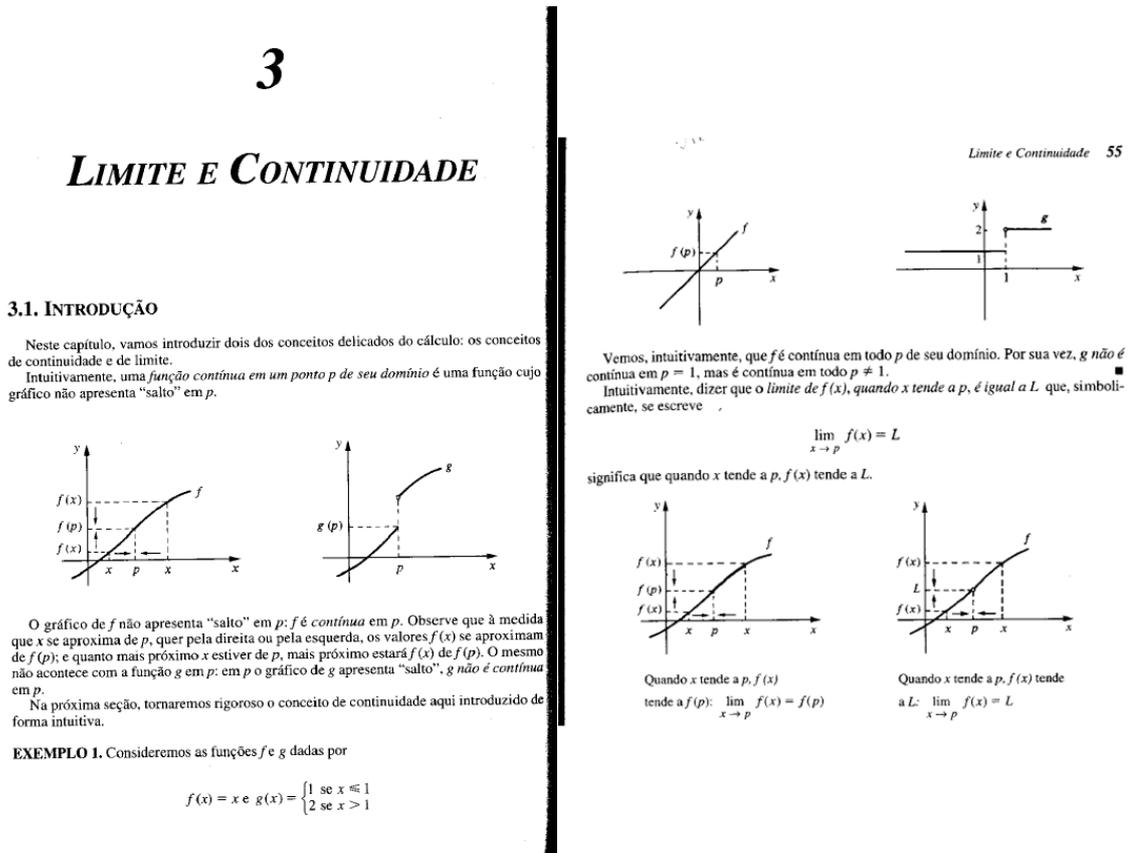
Fonte – Adaptação de Mação (2014, p 53-54)

Assim, crê-se que este apanhado conseguirá dar uma noção geral de como se desenvolve a aprendizagem do conceito de limite através do livro estudado.

O desenvolvimento do conceito de cálculo no livro didático “Um curso de Cálculo”, de Hamilton Guidorizzi.

Para exemplificar o trabalho de análise de livros, trazemos considerações sobre o livro que é comum nas bibliografias dos cursos citados. Ao analisar a introdução do conceito de limite, é possível verificar que este está intrinsecamente ligado ao conceito de continuidade, que é desenvolvido no desenrolar do capítulo. Vejamos na Figura 2, a abordagem inicial do livro.

Figura 2: A abordagem do conceito de limite no livro “Um curso de Cálculo”, de Hamilton Guidorizzi.



Fonte – GUIDORIZZI, 2010, p. 54-55.

O desenvolver do capítulo é pautado na resolução de exemplos para introduzir os conceitos. Nesse sentido, leva-se este fato em consideração para analisar as questões. Vejamos:

- Como é feita a introdução do conceito de limite?

A introdução do conceito de limite é feita de maneira intuitiva, relacionando a visualização gráfica através da aproximação em torno do limite da função.

- Quais “já-encontrados” são necessários e utilizados para a compreensão do conceito de limite?

Inicialmente, é necessária a compreensão do conceito de função, especialmente da sua notação. Ainda, o livro apresenta na Figura 2, a noção de continuidade da função, que é, nesse processo, um “já-encontrado” necessário para compreender o conceito de limite. Entretanto, o livro aborda a continuidade da função de maneira mais clara após o trabalho

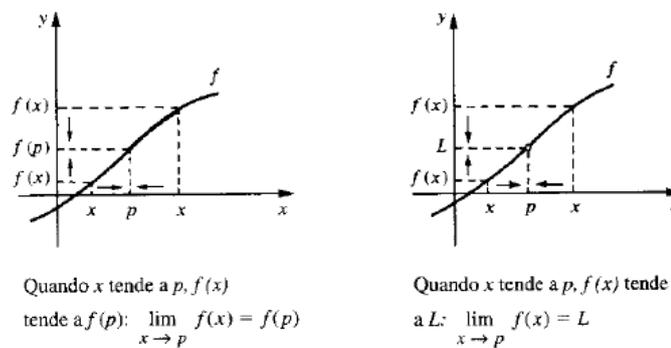
com as noções intuitivas de limite, caracterizando este conceito como um “a-encontrar” em um momento à posteriori.

- Quais características da Teoria dos Três Mundos da Matemática estão evidenciadas na abordagem do livro e que o aluno poderá desenvolver ao estudar por ele?

O aluno poderá desenvolver características dos mundos conceitual corporificado e operacional simbólico.

Mundo conceitual corporificado – ao apresentar a construção gráfica das funções e especialmente, da noção do limite para os dois casos, conforme visto na Figura 3.

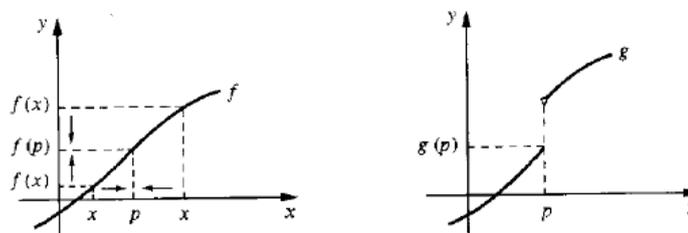
Figura 3: Construção gráfica do conceito de limite.



Fonte - GUIDORIZZI, 2010, p. 55

E também ao trabalhar a ideia da continuidade da função como salto, como visto na Figura 4.

Figura 4: Construção gráfica do conceito de continuidade da função.



Fonte: GUIDORIZZI, 2010, p. 54

Mundo operacional simbólico – ao apresentar a notação do limite da função $f(x)$ como sendo $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

Sendo assim, a abordagem inicial do livro de Guidorizzi apresenta características dos mundos conceitual corporificado e operacional simbólico. Aliás, esta concepção perpassa grande parte do desenvolvimento do capítulo, sendo que o autor apresenta o conceito de derivada (sem chama-lo de derivada) como limite antes mesmo de defini-lo formalmente.

Nesse sentido, um aluno que aprenda por este livro trabalhará com a definição formal de limite na página 70, sendo que neste intervalo de paginas são trabalhados tópicos como a função contínua, a qual apresenta características dos Três Mundos da Matemática no desenvolver do conceito e ainda, a derivada como sendo um limite.

Algumas Considerações

Como o trabalho encontra-se em fase de implantação, ainda não é possível perceber quais características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall (2004; 2013) estão mais presentes na visão dos alunos.

Entretanto, a análise inicial dos livros didáticos traz resultados interessantes à discussão do tema: os livros analisados, em sua maioria, priorizam o trabalho com o mundo operacional simbólico, especialmente no desenvolver dos exercícios, percebendo-se numa grande maioria a intenção de reproduzir mecanicamente o algoritmo de resolução de determinado limite.

Neste sentido, pergunta-se: qual será a influência desta abordagem na compreensão dos conceitos pelos alunos? Será que os alunos trazem características dos Mundos Conceitual Corporificado e Axiomático Formal em sua apropriação do conceito ou apenas trabalham com o mundo operacional simbólico, desenvolvendo a resolução de exercícios simples, pautados na mera reprodução do modelo de resolução?

Questões como estas são pertinentes neste estudo, levando em consideração que pretende-se compreender como se dá a aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido, um aprofundamento nestas discussões pode contribuir para que a

disciplina de Cálculo seja mais eficaz nos cursos superiores, com melhores aproveitamentos e principalmente, com melhores aprendizagens.

Referências

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et al. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. vol.1.

LIMA, R.N. **Equações algébricas no ensino médio: Uma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática**. 2007. 358f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2001.

MOLON, J. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software geogebra**. 2013. 198f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2013.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2003.

TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings...** Bergen: PME, 2004. p. 281–288.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.