

Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS

Janice Rachelli¹

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo do trabalho. O presente estudo é parte de uma pesquisa de doutorado, em andamento, que se situa no campo da Educação Matemática do ensino superior e insere-se na linha de investigação voltada ao ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo. O objetivo, nesta pesquisa, é analisar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes dos cursos de Mestrado Profissional e Acadêmico de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática de uma instituição privada do estado do Rio Grande do Sul. O referencial teórico utilizado é o modelo cognitivo APOS, de Ed Dubinsky e seus colaboradores, desenvolvido a partir da teoria da Abstração Reflexionante, de Jean Piaget. Nesta pesquisa, optou-se por uma metodologia qualitativa em que os dados serão obtidos com base no desenvolvimento de situações de ensino em sala de aula, que abordam a evolução histórica dos conceitos, com a finalidade de promover a construção dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca e que contemplam as construções mentais que o estudante poderá ter ao desenvolver sua compreensão sobre esses conceitos. Os instrumentos de coleta de dados que compõem este estudo envolvem a análise de documentos e o diário de campo. Espera-se que os resultados da pesquisa promovam discussões e reflexões sobre como a utilização de situações de ensino que tratam da evolução do conceito de derivada pode favorecer o processo de ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo. Além disso, pretende-se contribuir para o avanço da pesquisa em Educação Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria APOS; Cálculo; Derivada clássica; Derivada fraca.

Introdução

A noção de derivada de uma função, juntamente com a de integral, representam conceitos chave no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, doravante chamado apenas de Cálculo. Presente em disciplinas dos cursos das áreas exatas, tecnológicas, naturais e econômicas, entre outras, o Cálculo desempenha importante papel na formação dos estudantes, visto que os conhecimentos básicos sobre seus conceitos são essenciais tanto para uma boa integração dos alunos ao ensino superior como para servir de fundamentos para todas as disciplinas científicas que utilizam a matemática como ferramenta na resolução de problemas.

No entanto, quando se trata do ensino e da aprendizagem de conceitos de Cálculo, várias dificuldades vêm sendo observadas e têm gerado inúmeras pesquisas em Educação Matemática. Entre essas dificuldades destacamos: dificuldades inerentes aos conceitos, o

¹ Centro Universitário Franciscano, e-mail: janicerachelli@gmail.com, orientadora: Dra. Vanilde Bisognin.

que resulta altos índices de reprovação (BARUFI, 1999; RESENDE, 2003); ensino de maneira descontextualizada e algoritmizada (ARTIGUE, 2001); conflitos pedagógicos revelados naquilo que o professor faz (demonstrar os resultados) e aquilo que se pede aos alunos (exaustivas listas de exercícios) (VIEIRA, 2013); dificuldades em relacionar as abordagens gráficas e analíticas (ALMEIDA; VISEU, 2002).

Dentro desse contexto, ao fazer um levantamento das pesquisas realizadas no período de 2003 a 2013, Marini (2014) estabelece alguns resultados consensuais a respeito das dificuldades encontradas sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo. As dificuldades apontadas referem-se a quatro vieses: dificuldades apresentadas por uma formação deficiente no ensino básico pelo sujeito aprendiz; dificuldades que surgem pela falta de formação adequada dos professores com relação aos conceitos matemáticos ou à própria didática utilizada em sala de aula; dificuldades intrínsecas e inerentes aos próprios objetos matemáticos; dificuldades no ambiente escolar pela falta de infraestrutura física e de equipamentos adequados. Salienta ainda que diversos trabalhos indicam a importância de abordar os conceitos do Cálculo, considerando seu contexto histórico e de fazer uso de Tecnologias da Informação e Comunicação no seu ensino.

No que se refere especificamente à derivada, trabalhos mais recentes, desenvolvidos com alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, Física, Química e Engenharias destacam que: o sistema educativo tem priorizado em geral, processos de construção e avaliação formais, assim como aspectos algorítmicos, em que os estudantes derivam, integram e calculam limites, mas não são capazes de dar um sentido mais amplo às noções envolvidas, e revelam somente os aspectos mais essenciais e elementares presentes na construção dos conceitos (JUNQUEIRA, 2014; VRANCKEN; ENGLER, 2014); há baixo rendimento dos estudantes que ingressam no primeiro ciclo do ensino superior e, para superar as dificuldades, são necessárias práticas educativas que levem em conta as construções mentais que um estudante deve fazer para entender os conceitos matemáticos (VEGA, 2012; VEGA; CARRILLO; SOTO, 2014); os estudantes, futuros professores, apresentam dificuldades na resolução de tarefas relacionadas a distintas interpretações da derivada: inclinação da reta tangente, taxa de variação instantânea e velocidade (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015); os alunos têm dificuldades em relacionar os modos de representação analítico e gráfico da função e suas derivadas (PINTO; VIANNA, 2012; SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2013), entre outros.

Algumas dessas dificuldades, também são notadas, em cursos de formação continuada, nos quais se observa que, mesmo os alunos que já estudaram os conceitos do Cálculo em disciplinas na graduação, apresentam sérios problemas em relação à compreensão do conceito, à interpretação e à representação analítica e gráfica da derivada (BISOGNIN; BISOGNIN, 2011, 2015).

Frente a essas dificuldades, professores e pesquisadores vêm trabalhando no sentido de melhoria do ensino de Cálculo, seja em atividades desenvolvidas no decorrer do andamento das disciplinas, seja em atividades extraclasse por meio de minicursos e participação voluntária.

Silva (2011) destaca que a comunidade científica está atenta às questões que envolvem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular, do Cálculo, no nível universitário e salienta que esse processo se compõe de diversas dimensões que influenciam o ensino de Cálculo, como por exemplo, as dificuldades inerentes aos próprios conceitos, dificuldades que surgem na transição do estudo da matemática básica para o ensino superior e as expectativas dos segmentos envolvidos no processo (aluno ingressante na universidade, professor do ensino superior e professor da educação básica), entre outras. Segundo ele, essas dimensões constituem uma fonte de questões a serem investigadas como forma de refletir sobre a realidade em estudo para que, com os conhecimentos obtidos, seja possível identificar os elementos constitutivos e poder intervir no processo de ensino e aprendizagem.

Ao tratar do estado atual e perspectivas de pesquisas em Cálculo, Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) destacam que é fundamental que as pesquisas contribuam para o aperfeiçoamento da prática educativa, visando melhorar o ensino e a aprendizagem em cursos de Cálculo, que são cursados por milhões de alunos a cada ano no mundo. Salientam que as pesquisas desenvolvidas, de um modo geral, têm seguido quatro padrões: identificar as dificuldades e obstáculos cognitivos apresentados pelos estudantes, investigar os processos pelos quais os estudantes aprendem um conceito particular, além de avaliar os efeitos das inovações curriculares e pedagógicas na aprendizagem dos alunos e, mais recentemente, pesquisar sobre como o conhecimento, a prática e as crenças do professor influenciam na aprendizagem dos estudantes.

Sobre as lacunas e novas áreas de investigação, os autores destacam que há escassez de pesquisas que ultrapassem os primeiros tópicos do Cálculo e, nesse contexto, são necessárias pesquisas nas áreas de cálculo de várias variáveis e equações diferenciais, e

pesquisas que relacionem o Cálculo com disciplinas específicas da Engenharia, Física, Biologia e Química. Além disso, salientam que é necessário coordenar, junto aos professores, departamentos e instituições de ensino, os avanços que estão sendo obtidos com o uso de diferentes perspectivas teóricas no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.

Além do mais, os trabalhos que abordam a derivada, levantados na revisão de literatura, evidenciam a necessidade de que novas pesquisas sejam realizadas, como forma de investigar estratégias e alternativas para o ensino de Cálculo, de maneira que o estudante possa compreender e dar sentido aos conceitos e procedimentos e assim contribuir para a construção do conhecimento matemático.

Os aspectos que propomos desenvolver neste trabalho estão relacionados à compreensão de conceitos do Cálculo, especificamente relativos ao conceito de derivada. Nosso interesse, nesta pesquisa, centra-se em compreender como ocorre a construção do conceito de derivada pelos alunos e na análise de como o aluno compreende a evolução das diferentes noções de derivada que surgiram na medida em que problemas físicos e geométricos foram sendo resolvidos por cientistas ao longo da história.

Nesse sentido, em nossa pesquisa, utilizaremos atividades que envolvem aspectos históricos dos conceitos de derivada clássica² e derivada fraca, e usaremos o modelo cognitivo APOS³, tendo como base a decomposição genética dos conceitos e a estratégia de ensino do ciclo ACE⁴ para analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão desses conceitos e a percepção da evolução histórica do conceito de derivada. Para tanto, pretende-se partir dos problemas históricos associados à derivada, até chegar ao conceito clássico, envolvendo os principais resultados e as diferentes interpretações, para após, com o estudo da equação da onda, chegar ao conceito de derivada fraca.

O presente estudo torna-se diferenciado das demais pesquisas que abordam o conceito de derivada, por investigar, além da compreensão do conceito de derivada clássica, também a

² Entendemos derivada clássica como a definida pelo limite da razão incremental.

³ A denominação APOS se deve as quatro componentes essenciais identificadas nos estudantes, quando da construção de um conceito matemático, a saber, Action, Process, Object e Schema. Também é denominada teoria APOE (Ação-Processo-Objeto-Esquema).

⁴ O ciclo de ensino ACE refere-se a Atividades, discussões em Classe e Exercícios.

compreensão do conceito de derivada fraca. Cabe salientar que as pesquisas encontradas na literatura se referem a dificuldades com o conceito de derivada clássica. Nenhuma delas trata do conceito de derivada fraca, o que reitera a importância da realização do presente estudo.

Objetivos

Objetivo geral: Analisar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes dos cursos de Mestrado Profissional e Acadêmico de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Objetivos específicos:

- Analisar como os estudantes se apropriam dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca.
- Identificar, com base na teoria APOS, as ações, processos, objetos e esquemas utilizados pelos estudantes na construção dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca.
- Analisar como os estudantes compreendem a necessidade de obtenção de um novo conceito de derivada para a resolução de problemas clássicos e como percebem a passagem da ideia de derivada clássica para a derivada fraca.
- Analisar como sequências de ensino podem favorecer o processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos de derivada clássica e de derivada fraca.

A teoria APOS

O referencial teórico utilizado na pesquisa é o modelo cognitivo APOS, desenvolvido por Ed Dubinsky e seus colaboradores. A teoria APOS vem sendo utilizada por pesquisadores como meio para conhecer as dificuldades dos alunos com os conceitos matemáticos do ensino superior e analisar as construções mentais utilizadas na aprendizagem desses conceitos, além de propor atividades de ensino que contribuam para a compreensão dos conceitos.

A teoria APOS é uma teoria que foi desenvolvida a partir das ideias de Piaget sobre a construção do conhecimento humano (PIAGET, 1971) e, segundo Dubinsky (1991), surgiu na tentativa de compreender o mecanismo de abstração reflexionante, utilizado para

descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças (PIAGET, 1995) e estender esta ideia aos conceitos matemáticos mais avançados estudados no ensino superior.

Estruturas e mecanismos mentais

O modelo cognitivo APOS, se baseia nas ações, processos, objetos e esquemas, chamados de estruturas mentais, que cada indivíduo realiza sobre os conceitos matemáticos que aprende e envolve os mecanismos mentais de abstração reflexionante: interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade.

A interação entre as estruturas e os mecanismos para a construção do conhecimento matemático pode ser descrita como segue: pode-se considerar que a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são então encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas (ARNON et al., 2014).

Uma ação é uma transformação externa em que cada etapa precisa ser executada explicitamente e guiada por instruções externas; além disso, as etapas da ação ainda não podem ser imaginadas.

Os processos são construídos usando um dos dois mecanismos mentais: interiorização ou coordenação. Cada um desses mecanismos dá origem a novos processos. Como as ações são repetidas e refletidas, o indivíduo se move a partir de pistas externas para ter um controle interno sobre elas. Isso é caracterizado pela habilidade de imaginar as etapas sem ser necessário realizá-las explicitamente, além de ser capaz de pular etapas, como também revertê-las. A interiorização é o mecanismo que possibilita fazer essa mudança mentalmente. Segundo Dubinsky (1991), uma ação deve ser interiorizada, o que significa que alguma construção interna é feita em relação à ação. Uma ação interiorizada é um processo.

A reversibilidade é um mecanismo que permite ao indivíduo pensar no processo ao contrário, não necessariamente no sentido de anular, mas como meio de construir um novo processo que consiste em inverter o processo original.

A encapsulação ocorre quando um indivíduo converte uma estrutura dinâmica (processo) em uma estrutura estática (objeto). Se o indivíduo se torna consciente do processo como um todo, percebe que as transformações podem agir sobre essa totalidade e pode construir tais transformações (explicitamente ou na imaginação), e assim o indivíduo tem encapsulado o processo em um objeto cognitivo.

Por exemplo, um estudante pode ter interiorizado a ação de determinar a derivada de uma função e pode ser capaz de fazer isso com sucesso com um grande número de exemplos. Se o processo é interiorizado, o aluno pode ser capaz de revertê-la para resolver problemas em que uma função é dada e se deseja encontrar uma função cuja derivada é a função original. Isso corresponde ao processo de antidiferenciação ou integração, e que também é primeiro uma ação e, em seguida, deve ser interiorizado para se tornar um processo. Encapsular os processos de diferenciação e de integração – pelo menos a ponto de tê-los como objetos de reflexão – torna-se um pré-requisito essencial para o entendimento do teorema fundamental do Cálculo (DUBINSKY, 1991).

Uma vez que processos têm sido encapsulados em objetos mentais, eles podem ser desencapsulados e voltar ao processo que deu origem ao objeto, assim como os objetos podem ser desencapsulados para obter os processos dos quais eles provém. A interação de ações, processos e objetos por meio dos mecanismos de interiorização, encapsulação, desencapsulação, coordenação e reversibilidade dá origem aos esquemas. De acordo com Dubinsky (1991), um esquema é caracterizado pelo seu dinamismo e sua reconstrução contínua como determinado pela atividade do sujeito em situações matemáticas específicas. Os esquemas são estruturas que contêm a descrição, a organização e exemplificações de estruturas mentais que um indivíduo constrói sobre um conceito matemático. A generalização ocorre quando o indivíduo aprende a aplicar um esquema existente em contextos distintos. Outros objetos podem adicionar-se a um esquema para serem trabalhados em outros contextos. Assim, o sujeito aplica um esquema existente em uma ampla coleção de fenômenos, tornando-se consciente da aplicabilidade do esquema, que ocorre quando um processo é encapsulado como objeto.

A decomposição genética

Na teoria APOS, a análise do conceito matemático específico leva à chamada decomposição genética desse conceito, que descreve as estruturas e os mecanismos

mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico. Geralmente, começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem do conceito, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente.

A decomposição genética busca uma descrição detalhada de como o sujeito poderá fazer a construção do conhecimento. A partir da decomposição genética, é possível que se observe o progresso da aprendizagem do aluno, que será apresentado como um guia possível para novas atividades de forma a melhorar a compreensão do conceito.

Além de descrever como um conceito pode ser construído mentalmente, a decomposição genética pode descrever os pré-requisitos necessários para a construção do conceito. Isso pode explicar as diferenças no desenvolvimento dos alunos e pode ser responsável pelas variações no seu desempenho matemático. Para cada conceito matemático, são elaboradas sequências de ensino que se organizam no que se denomina ciclo de ensino ACE.

O ciclo de ensino ACE

O ciclo de ensino ACE é composto por atividades para serem realizadas, discussões em classe e exercícios para serem feitos com lápis e papel.

Para as atividades que constituem o primeiro passo do ciclo, os estudantes trabalham cooperativamente em grupos, em tarefas projetadas para fazerem as construções mentais sugeridas pela decomposição genética. O foco dessas tarefas é promover a abstração reflexionante. Nas discussões em sala de aula, a segunda parte do ciclo, os alunos desenvolvem, discutem e refletem sobre as atividades designadas pelo professor. Como o professor guia as discussões, ele pode fornecer definições, explicações e apresentar uma visão geral do que está sendo discutido. Os exercícios, a terceira parte do ciclo, consistem em problemas considerados padrão, que servem para reforçar as atividades de sala de aula. Os exercícios ajudam no desenvolvimento contínuo das construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Eles também orientam os alunos a aplicar o que aprenderam e a considerar ideias matemáticas relacionadas.

A implementação de uma sequência de atividades fornece uma oportunidade para coletar dados. A análise dos dados tem duas finalidades: medir o desempenho dos estudantes e determinar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição

genética. Isso fornece uma oportunidade para pesquisadores testarem empiricamente a decomposição genética e avaliar a eficácia das situações de ensino (ARNON et al., 2014). Nesse contexto, entendemos que a utilização de sequências de ensino que abordam diferentes noções da derivada ao longo da história, com início na derivada clássica até chegar ao conceito de derivada fraca, tendo como base a decomposição genética dos conceitos, irá contribuir para o desenvolvimento de ações, processos, objetos e esquemas e, como consequência, facilitará a aprendizagem e a compreensão dos conceitos pelos alunos.

Metodologia

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa. De acordo com Creswell (2014), na pesquisa qualitativa, a coleta de dados ocorre no contexto natural dos participantes, sendo que os próprios pesquisadores criam seus instrumentos de pesquisa e coletam pessoalmente os dados; a análise dos dados estabelece padrões; e o relatório final inclui as vozes dos participantes, a reflexão, descrição e interpretação do problema pelo pesquisador, além de sua contribuição para a literatura.

É com base nessas características da pesquisa qualitativa que se propõe desenvolver este estudo, como forma de observar os estudantes em seu ambiente de ensino e aprendizagem, analisar os significados que eles atribuem ao problema em estudo e compreender como se dá a construção dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca.

Os participantes desta pesquisa são estudantes dos cursos de Mestrado Profissional e Acadêmico de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, de uma instituição privada do estado do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral, a qual contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais.

Como instrumentos de coleta de dados, serão utilizados a análise de documentos e o diário de campo. A análise de documentos será feita em dois momentos. Num primeiro momento, serão considerados livros de História da Matemática, Cálculo e Equações Diferenciais Parciais e pesquisas em Educação Matemática sobre a derivada. Com os dados obtidos na análise, pretende-se obter a decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca como forma de propor um modelo cognitivo que descreva as construções mentais específicas que um aluno poderá ter ao desenvolver sua compreensão sobre esses conceitos (DUBINSKY, 1991) e, além disso, criar situações de ensino, tendo como base a

decomposição genética, que venham favorecer a compreensão e aprendizagem desses conceitos. A análise de livros didáticos de Cálculo e de Equações Diferenciais Parciais possibilitará saber como e de que forma os conceitos de derivada clássica e derivada fraca são tratados nos livros didáticos, o que servirá de subsídios para a elaboração das atividades.

Num segundo momento, serão analisadas as produções dos alunos nas atividades propostas nas situações de ensino e as observações anotadas no diário de campo.

O ciclo de ensino ACE será utilizado nesta pesquisa como metodologia de ensino. Assim, serão desenvolvidas situações de ensino, compostas por atividades que levam em conta alguns aspectos históricos, as definições e as principais propriedades dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca, bem como a decomposição genética desses conceitos como forma de facilitar a elaboração do conhecimento e verificar, com base na teoria APOS, em que condições essa elaboração foi realmente compreendida pelo aluno.

Para cada uma das atividades, serão feitas discussões em grupo com o objetivo de promover a abstração reflexionante e fazer com que os alunos passem de um patamar inferior para um patamar superior de conhecimento sobre os conceitos estudados. Com a resolução de cada uma das atividades pelos estudantes, espera-se que eles desenvolvam os mecanismos mentais de abstração reflexionante (interiorização, coordenação, reversibilidade, encapsulação e generalização) que conduzem à construção de estruturas mentais (ação, processo, objeto e esquema) e, com isso, desenvolvam a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca, bem como a compreensão da evolução histórica do conceito de derivada.

Os dados obtidos a partir dos registros dos alunos nas atividades que serão propostas e nas anotações no diário de campo serão organizados de forma indutiva com a finalidade de obter padrões ou categorias de análise, que permitirão, a partir do pensamento dedutivo, obter os resultados desta investigação.

Considerações finais

Esta pesquisa está em fase de desenvolvimento. Até o presente momento, foram realizadas as seguintes atividades:

- Revisão de literatura com vista a delinear, descrever e analisar pesquisas que tratam do ensino e aprendizagem da derivada.

- Estudo do referencial teórico em que destacamos fundamentos teóricos da teoria de Jean Piaget (epistemologia genética, pensamento formal e abstração reflexionante) e da teoria APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores.
- Estudo da evolução do conceito de derivada, a partir de fatos históricos de como o conceito de derivada clássica se desenvolveu ao longo do tempo, da solução de D'Alembert e do modelo matemático obtido por meio do princípio de Hamilton para a equação da onda e, do conceito de derivada fraca.
- Elaboração da decomposição genética dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca.
- Elaboração das situações de ensino, as quais envolvem as construções históricas do conceito de derivada, os conceitos de derivada na atualidade e o conceito de derivada fraca.

Referências

ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, Portugal, 15(1), p. 193-219, 2002.

ARNON, I. et al. **APOS Theory**: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014.

ARTIGUE, M. What can we learn from educational research at the university level? In: HOLTON, D. (Org.) **The teaching and learning of Mathematics at University Level**: An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 207-220.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 195 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v. 13, n. 3, p. 509-526, 2011.

_____. Taxa de variação: como professores em formação continuada compreendem o conceito. In: VI SIPEM Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis (GO). **Anais ...** Pirenópolis, p. 1-12, 2015.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Porto Alegre: Penso, 2014.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

JUNQUEIRA, S. M. S. **Experiências de estudantes na construção do conhecimento de derivada em aulas de Cálculo 1**. 2014. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

MARINI, W. **Um panorama de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: 2003 a 2013**. 2014. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. Petrópolis: Vozes, 1971.

_____. **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 60-89, 2015.

PINTO, G. M. F.; VIANNA, C. C. S. Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de Cálculo semipresencial. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro (RJ), v. 2, n. 3, p. 74-90, 2012.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM Mathematics Education**, Berlim (Alemanha), v. 46, p. 507-515, 2014.

RESENDE, W. M. **O Ensino do Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 281-302, 2013.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v. 13, n. 3, p. 393-413, 2011.

VEGA, M. A. **Análisis de la construcción del concepto de la derivada em um primer ciclo de enseñanza superior assistida por ordenador**. 2012. 439 f. Tesis doctoral (Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía) – Universidad de Huelva, Espanha, 2012.

VEGA, M. A.; CARRILLO, J.; SOTO, J. Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429, 2014.

VIEIRA, A. F. **Ensino de Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao *humans-with-media***. 2013. 204 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

VRANCKEN, S.; ENGLER, A. Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 449-468, 2014.