

## Girard Desargues e o desenvolvimento da geometria projetiva

Douglas Gonçalves Leite

### GD05- História da Matemática

#### Resumo

Com o objetivo de compreender o desenvolvimento histórico da Geometria Projetiva, se inicia o presente estudo. Este será baseado nos trabalhos do matemático Girard Desargues (1591-1661). A partir de suas obras originais pretendemos analisar, interpretar, e relatar quais são os conteúdos fundamentais para o desenvolvimento dessa geometria, que estava em ascensão no período do Renascimento. Serão analisados seus conceitos, teoremas e forma de representar imagens, destacando relações que são apresentadas pelo matemático e que começaram a ser adotadas como entes matemáticos. Serão expressos quando necessário, os processos formais desenvolvidos pelo matemático, de modo a trazer sua forma de apresentar sua matemática e auferir a partir do que seu trabalho tem a contribuir sobre esse novo campo.

**Palavras-chave:** Geometria Projetiva; Girard Desargues; Perspectiva.

#### Introdução

No início do século XIII com o surgimento do movimento renascentista influenciando em diversos campos da Arte, dentre elas, as artes plásticas, diversas modificações com relação a técnicas de pinturas foram surgindo. Deste modo pintores se preocupavam cada vez mais com a qualidade da representação tridimensional em suas obras.

Para aqueles que buscavam essa qualidade, os conceitos da Geometria Euclidiana já não satisfaziam suas necessidades. Na busca por outras formas de representações no plano surgem pinturas que trazer o efeito de profundidade. Para conseguir criar respectivo efeito, é necessário utilizar de linhas de projeção, as quais buscam um ponto de convergência. Entretanto, os primeiros trabalhos que representam essa característica são os do pintor Duccio di Buoninsegna (1255-1319), chamada *A Anunciação (Figura 1)*, pintada em 1307, representando a visita do anjo Gabriel a virgem Maria, trazendo a mensagem de que ela seria visitada pelo espírito santo. Essa pintura se destaca como uma das primeiras obras de Duccio a trazer a relação de composição de planos de fundo em uma proporção, com a apresentação de linhas de fuga, características fundamentais da Perspectiva e Geometria Projetiva.

**Figura 1:** Duccio, A Anunciação.



**Fonte-** Livro 100 Great Paintings: Duccio to Picasso.

Tais pintores se preocupavam com ferramentas e técnicas as quais poderiam auxiliar na produção de telas com tal proposta. Foi o caso de Leon Battista Alberti (1404-1472), o qual foi o primeiro a apresentar trabalhos teóricos (escritos) sobre Perspectiva e Arquitetura, o chamado “Os Dez Livros sobre Arquitetura” publicado em 1452. Além de produção escrita, ele contribuiu também com a produção do quadro *De Pictura* de 1435 apresentando sua técnica e descrevendo seu processo de construção.

É necessário apresentar que, ao se iniciar uma busca histórica sobre as origens da G.P (geometria Projetiva), as primeiras expressões desse conceito são encontradas em diversos trabalhos artísticos. Tal afirmação corresponde ao que é apresentado pelo historiador Nicolau Sevcenko, que afirma sobre as artes plásticas acabara se convertendo num centro de convergência de todas as principais tendências da cultura renascentista. (SEVCENKO, 1988, p. 23), justificando assim essa grande quantidade de pinturas e esculturas mesmo se tratando de um campo da matemática.

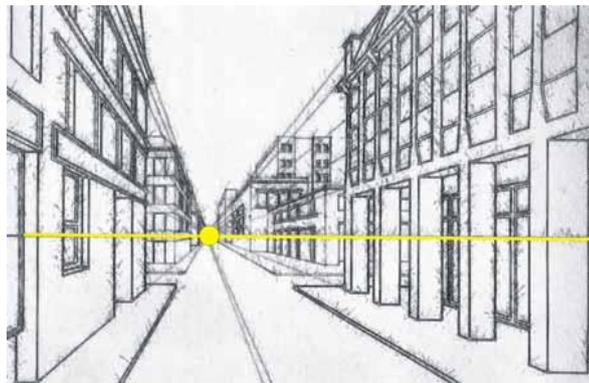
Dentro dos grupos de artistas se inicia a busca por conceitos matemáticos que são expressos por pinturas e esculturas. Surge então a necessidade de uma sistematização no modo de se observar um objeto, ou seja, de uma dada perspectiva e assim se inicia o processo em que se analisa o modo como se vê um objeto.

Utilizando de uma formulação matemática, sua essência seria o que é destacado por Heffez:

O método matemático é simples. Entre o olho e o objeto a ser pintado, forma-se um cone de raios luminosos, chamado de cone de imagem ou de projeção. A pintura é então idealizada como uma seção deste cone pelo plano da tela. Este método é chamado de seção de projeção (1985, p. 36).

Esse chamado *cone de raios luminosos* ou *cone de projeção* são necessariamente linhas de projeções, as quais possuem um foco (ponto em que as linhas se inter), e a partir desse foco, são desenvolvidas formas e figuras proporcionais ao longo desse cone, propiciando assim o efeito de profundidade. Hilton apresenta uma imagem que exemplifica quais são as chamadas linhas de fuga:

**Figura 2:** Linhas de Projeção (linha de fuga) com foco no lado esquerdo.



Fonte- Hilton: *Geometria nas Artes*.

É visto que, quando um quadro possui linhas de fuga, é necessário desenvolver todas as figuras que se sucedem referenciando-as com relação a suas respectivas linhas. A partir de uma proporcionalidade que está presente e é orientada pelas mesmas, é possível construir uma escala e com ela, relacionar as proporções das imagens e assim a criar o que é chamado de cone projetivo na tela, tornando possível representar o que é visto a olho nu.

Para se analisar tais construções com olhar matemático, é necessário iniciar o estudo sobre respectivo tema a partir dos trabalhos de Girard Desargues (1591-1661). O qual foi matemático, arquiteto, engenheiro e o primeiro a elaborar com linguagem matemática aquilo que pintores traziam em suas telas. Publicou trabalhos como *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (Projeto de esboço da interseção de um cone com um plano) apresentado em 1639, o qual discorre sobre propriedades na interseção entre cone e plano, extensamente estudado por Apolônio de Perga (262 a.C- 190 a.C).

Destacamos que Desargues, não somente desenvolveu concepções sobre as cônicas, cone projetivo, a partir dos trabalhos de Apolônio de Perga, mas também modificou o

modo em que se observavam tais conceitos que estavam presentes nos trabalhos de artistas daquele período, pois a geometria Projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem em generalidade sobre a geometria métrica de Apolônio (BOYER, 2001, p. 248).

O matemático apresentou novos teoremas e resultados, como o chamado “Teorema de Desargues”, o qual relata propriedades projetivas entre dois triângulos. Com isso, é visto que seu trabalho nos é apresentado como um ponto de partida para um olhar matemático sobre o estudo histórico do desenvolvimento dos primeiros conceitos projetivos.

Entretanto seus trabalhos não foram reconhecidos ao longo de sua vida, após seus estudos serem publicados, houve pouco interesse em suas pesquisas, seja por se tratar de um tema que estava começando a ser discutido, seja pela produção de outros trabalhos que foram aceitos com maior felicidade, como foi o caso de René Descartes (1596-1650), que se tornou um importante nome na história da geometria, e graças as teorias de Descartes serem rapidamente aceitas, os trabalhos de Desargues acabaram com menor visibilidade, como apresenta Granger:

A história mostra-nos que o sucesso do ponto de vista cartesiano obscureceu quase completamente o ponto de vista de Desargues. Nem os escritos arguesianos de Pascal sobre as cônicas (*o Essay* de 1640 e o *Traité* perdido), nem os de respeitáveis geômetras como Philippe de la Hire e Le Poivre nada mais fazem do que instituir, na verdade, nos séculos XVII e XVIII, uma Matemática à Desargues. Carnot, Monge, Poncelet, Michel Chasles retomarão as ideias arguesianas no início do século XIX e desenvolverão suas consequências num corpo de doutrina chamado “geometria moderna”. (GRANGER, 1974, p. 61).

Deste modo o que se apresenta como justificativa para tal projeto seria a importância de resgatar suas contribuições e apresentar sua teoria destacando sua forma de conceber esse novo conceito. Pretende-se pesquisar os conceitos históricos de seus trabalhos, desenvolvendo uma análise voltada para a história da matemática e trazer teorias que são utilizadas hoje, destacando assim o papel fundamental de Desargues para a evolução deste campo. Busca-se por meio das fontes primárias reunidas por M. Poudra em 1864, ter acesso a tais informações e desenvolver uma análise do que foi produzido ele em seu respectivo período.

Visto que não há traduções e estudos aprofundados aos trabalhos de Desargues no Brasil, e como destacado, seus trabalhos acabaram sendo obscurecidos por outros

matemáticos de sua época, o presente projeto se caracteriza como uma pesquisa inédita e contribui para o estudo de história da matemática.

### **A Matemática de Desargues**

Em seus trabalhos são descritas as técnicas e propriedades matemáticas envolvidas para a representação de três dimensões no plano. Ao contrário de Apolônio, não se preocupou somente com a métrica da geometria euclidiana, relacionados com propriedades angulares, proporções de segmentos. Sua ideia crucial, em que Desargues, buscou isolar as propriedades das figuras as quais se permaneciam invariantes sob projeção, e sua base seria a teoria das seções cônicas (FAUVEL; GRAY, 1987, p. 367). Com seu trabalho sobre seções cônicas intitulado *Brouillon Project* (do inglês *Rough Draft on Conics*) há conteúdos matemáticos sobre como criar a representação perspectiva, quais conceitos estão envolvidos, estes sendo considerados como conceitos não elementares e difícil linguagem como observado por Gray:

Os conteúdos matemáticos em *Rough Draft on Conics* não são elementares, e provavelmente é suficiente para impedir a maioria daqueles que não são treinados primeiramente pela ciência. Por outro lado, há matemáticos que podem ter se desencorajado pela linguagem e estilo dos trabalhos de Desargues. Por exemplo, declarações e provas de teoremas são dificilmente separados um do outro. Além disso, uma vez que o trabalho é altamente original e Desargues mesmo foi consciente dessa originalidade, sendo necessário um novo vocabulário. (GRAY; FIELD, 1987, p. 60).- Tradução Nossa.

Características como as precedentes apresentam peculiaridades nos trabalhos do matemático e informam sobre sua forma de construção, arrolam que as respectivas fontes trazem sua forma de expressar matemática. É possível afirmar que em seus estudos, Desargues estava relacionando sua área de trabalho com sua teoria. De modo que além de matemático, ele era arquiteto e graças as influências da arquitetura que sofrera utilizou de esboços e plantas e linguagem para expressar seus conceitos, e com isso criou um

seu próprio vocabulário, o que acabou por se tornar uma sutileza em suas obras, de modo que em seus trabalhos, Desargues dedica as primeiras páginas ao esclarecimento de palavras usadas e quais seus significados naquele momento.

O matemático apresentou este trabalho como sendo a continuidade de uma pesquisa em desenvolvimento. A primeira publicada em 1636, conhecida como *Perspectiva*, marcou o início da apresentação de sua forma de pensar a geometria. O segundo, publicado em 1639 chamado *Boruillon Project*, se caracterizou como a continuidade de um processo, apresentando novas descobertas desse campo que estava em desenvolvimento.

Sua escolha para explicar de forma diferente talvez seja devido ao seu reconhecimento de que o seu próprio trabalho também estava profundamente em obrigação com a tradição prática, especificamente para o estudo da perspectiva (que é uma forma de projeção cônica). Parece altamente provável que ele era na verdade um trabalho sobre assuntos relacionados perspectiva e que surgiram novas ideias à Desargues. (FIELD, 2015).- Tradução Nossa.

Além desse processo de criação, ele traz em seus textos, conteúdos que apresentam sua forma de visualizar essa geometria. Discorre sobre qual seria a utilidade de seu pensar matemática. Quanto a referente afirmação de que seus estudos estavam em obrigação com a tradição prática, juntamente com uma de suas cartas, pode-se considerar que Desargues buscou em sua geometria, o objetivo de produzir ferramentas de utilidade para as pessoas. Visto que em uma de suas cartas para o pintor e ex-aluno Abraham Bosse (1604-1676), relatou o que pensava ser o objetivo que adotou para a criação de seus conceitos, a qual busca uma funcionalidade para esse conhecimento em produção.

Reconheço francamente que nunca tive gosto pelo estudo ou pesquisa nem da Física nem da Geometria, a não ser enquanto possam servir ao espírito como meio de chegar a alguma espécie de conhecimento das causas próximas dos efeitos das coisas, que se possam reduzir a um ato efetivo para o bem e comodidade da vida, seja em seu uso para a manutenção e conservação da saúde, seja em sua aplicação para a prática de alguma arte.  
(*Reconnaissance de Mr. Desargues*, em face da *Perspective* de Abraham Bosse, 1648; em *Oeuvres de Desargues*, ed. Poudra, II, p.487).

Nele se reflete um pensamento que estava presente em estudiosos daquele período, como Blaise Pascal, contemporâneo e inventor da máquina chamada *Pascalina*, um mecanismo que resolvia operações matemáticas, criado para acelerar e facilitar a resolução de cálculos aritméticos, ou seja, uma tendência em pensar e produzir conteúdos voltados para a sociedade.

## Características da Geometria Projetiva

A geometria presente se difere em diversos aspectos da Geometria Euclidiana conhecida, traz em sua base a não aceitação do quinto postulado, ou conhecido como o postulado das paralela. Além dessas ideias essenciais da G.P. têm-se outras peculiaridades como o princípio da Dualidade, como relatados abaixo:

### *Incidência no Plano e o Princípio da Dualidade*

O princípio de dualidade, representa uma forte teoria desenvolvida na geometria projetiva, pois este trabalha com a permuta de objetos a serem estudados. Os casos mais trabalhados são permutações de elementos como pontos, retas e planos em propriedades e assim preservam seus resultados, como destacado em Heyting (1980, p. 25):

- 1) Dados dois pontos distintos, existe ao menos uma linha em que ambos são incidentes.
- 2) Dadas duas retas distintas, existe ao menos um ponto em que ambas são incidentes.

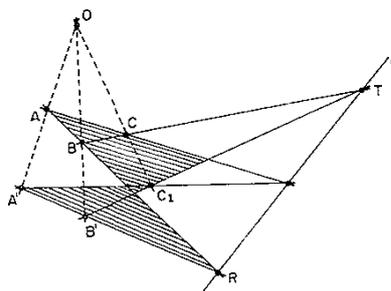
É visto que entre os axiomas que se antecedem é apresentada uma troca de elementos, de pontos por retas e de retas por pontos, isso sem modificar nada no corpo do enunciado. Além disso, outra característica não menos importante, e mais significativas para a “classificação” dessa geometria é o que se afirma em: “existe ao menos um ponto em que ambas (duas retas) são incidentes”, falando sobre a existência de um ponto de incidência com relação a duas retas quaisquer. Nesse momento, se faz necessário pensar sobre o postulado das paralelas de Euclides que, em resumo, garante que dada duas retas paralelas, estando no mesmo plano, elas não se interceptam. Assim na G.P. se afirma a existência de ao menos um ponto em que duas retas são incidentes, isso independente da condição em que essa reta é construída no plano projetivo. Deste modo, se trata de uma negação para o postulado das paralelas de Euclides.

E com isso é visto que, se adentra ao campo das geometrias não-euclidianas, novamente destacamos o papel de Desargues nesse desenvolvimento, e a criação de um novo campo de estudo, o qual seria estudado por diversos matemáticos futuros, como o caso de Jean V. Poncele (1788-1867), Gaspard Monge (1746-1818), entre outros.

## O Teorema de Desargues

Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  estão em perspectiva central, se e somente se, os prolongamentos de  $AB$  e  $A'B'$ ,  $BC$  e  $B'C'$ ,  $AC$  e  $A'C'$ , determinam três pontos colineares. Como destacado os triângulos dito como “triângulos projetivos”, em que apresentam a projeção de um dado triângulo, em outro, isso a partir do foco.

**Figura 2:** Triângulos projetivos de Desargues.



Deste modo, os conteúdos iniciais para o conhecimento da G.P. se surgem nas mãos de Desargues. Entretanto, essas inovações acarretaram numa maior dificuldade de compreensão de pesquisadores com relação ao seu período. Seus estudos sobre geometria demoraram aproximadamente um século para serem reconhecidos e novamente se tornarem área de pesquisa, tornando-se conhecido como “Geometria Moderna”:

[...] inventou uma nova maneira, não-grega de fazer geometria, agora chamado de "projetivo" ou geometria "moderna". Como matemático, ele foi realmente muito bom: muito original e completamente rigoroso. Ele é, no entanto, longe de ser lúcido em seu estilo matemático. (FIELD, 1995)- Tradução Nossa.

Com isso é visto que há pesquisadores que se preocuparam com relação a importância desses textos matemáticos na história da G.P. Entretanto, neste projeto pretende-se analisar os trabalhos originais, compreender os textos citados anteriormente, juntamente com as cartas que se tem acesso, e assim produzir informações sobre conteúdos de G.P que representem a forma que o matemático procurou apresentar sua teoria e conhecimentos que estavam sendo fomentados naquela época.

## OBJETIVOS

- Compreender e descrever os principais conteúdos tidos como fundamentais para o desenvolvimento da Geometria Projetiva de Girard Desargues.
- Destacar conteúdos que são estudados na atualidade e que surgiram nos trabalhos de Desargues.

## MATERIAL E MÉTODOS

O presente trabalho se aproxima da pesquisa historiográfica e será desenvolvido a partir da análise e interpretações das obras originais de Girard Desargues, estas publicadas entre 1630-1640. Seus estudos estão disponíveis na Biblioteca Nacional da França, seção Gallica, intitulados como: *métode universelle de Mettre em Perspective (1636)*; *Gnomonique (1640)*, além das obras, serão analisadas as cartas escritas entre Desargues e Blaise Pascal, René Descartes e Abraham Bosse. Estes documentos são necessários para compreender qual era a geometria que se apresentava em determinado período histórico e assim apresentar qual e como se desenvolvia seus conteúdos e quais métodos/técnicas foram utilizados para o desenvolvimento de sua teoria.

Serão utilizadas fontes historiográficas, as quais possibilitam a interpretação e construção de uma forma de pensar e produzir uma matemática em Desargues, com suas características. De modo que o caráter narrativo e mais ou menos sintético desse gênero de documentos contribui muito para o historiador ter uma ideia da seriação dos acontecimentos. (BASSELAAR, 1968, p.124).

Utilizaremos também os trabalhos de Michel Chasles, o qual discorre sobre a origem e o desenvolvimento dos métodos em geometria, destacando assim a compreensão de outro matemático que analisou as obras de Desargues.

Por último é necessário ver qual a concepção de G.P que é adotada hoje, quais propriedades matemáticas são fundamentais para sua compreensão. Agrupando todas essas informações pretendemos criar uma relação, destacando fundamentos os quais

caracterizem a geometria em respectivo período histórico. Com a utilização de fontes primárias é visto que se trata de um trabalho de descoberta ao longo do processo de estudo, e essas descobertas serão contextualizadas em seu respectivo tempo e grupo social, caracterizando assim um olhar histórico ao tema.

## Referências

- BASSELAAR, J.V. Introdução aos Estudos Históricos. 3.ed, São Paulo: Editora Heerder. 1968.
- BOYER, Carl. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed, São Paulo: Edgard Blucher LTDA. 2001.
- CHASLES, M. Aperçu Historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, Bruxelas, 1873.
- EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp. 2009.
- FIELD, J. V. Girard Desargues. Agosto 1995. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Printonly/Desargues.html> . Acesso em. 22 jun. 2015.
- FIELD, J. V; GRAY, J. J; The Geometrical Work of Girard Desargues. 1. ed. Nova York: Springer-Verlag. 1987.
- FOUCAULT, M. As Palavras e as Coisas. Tradução de Salma Tannus Muchail. São Paulo. 8. ed. Livraria Martins Fontes Editora Ltda. 2000
- Gordon, D. The National Gallery, London 100 Great Painting: Duccio to Picasso. Sponsored by Coutts & Company and Published by Order of the Trustees Publications Department National Gallery, London. 1981.
- GRANGER, Gilles G. Filosofia do Estilo. 1. ed. São Paulo: Perspectiva. 1974.
- GRAY, J.J; Fauvel, J. The History of Mathematics a Reader. 2ª ed. Londres: The Open University. 1987.
- HEFEZ, A. Uma Introdução a História da Geometria Projetiva. Vitória: 1985. Notas de uma Palestra profrida na Reunião Regional da SBM. Disponível em: <<http://rmu.sbm.org.br/artigos.php>>. Acesso em: 20 jun. 2015.
- HILTON, A. M. Geometria nas Artes. 2010. Disponível em: [http://www.hamello.com/PDF/livro\\_pt.pdf](http://www.hamello.com/PDF/livro_pt.pdf). Acesso em. 22 jul. 2015.
- LE GOFF, Jaques. Os Intelectuais na Idade Média. Tradução de Marcos de Castro. 4. Ed. Rio de Janeiro. José Olympio LTDA. 2011.
- POUDRA, M. Oeuvres de Desargues, Réunies et Analysées. Paris, 1864.
- RICOEUR, P. O Conflito das Interpretações. Tradução de Sá Correia, M.F. 1.ed.Rés- Editora, 2009.
- Sevcenko, N. O Renascimento. 14. ed. Editora da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). 1988.