

O ensino de divisão: reunindo registros

Simone Danielle Tychanowicz¹

GD5 – História da Matemática/Educação Matemática

Resumo do trabalho: Este texto apresenta aspectos de uma pesquisa que está em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática da UFPR. Seu foco é compreender o ensino de divisão nos anos iniciais, pautando-se no entendimento de professores atuantes nessa fase escolar. Perseguindo a interrogação: “O que é isto: o ensino de divisão nos anos iniciais?”, assumimos o caráter qualitativo na investigação com abordagem fenomenológica. O movimento investigativo em torno da interrogação abriu-nos um leque de possibilidades para a compreensão de tal ensino. Um dos caminhos seguidos e que aqui será exposto, foi o da história desse conhecimento por registros que explicitam de algum modo o dividir. Portanto, neste texto, expomos alguns registros históricos que nos foi possível conhecer sobre a divisão em tempos diferentes.

Palavras-chave: história; matemática; formação; professores; anos iniciais.

Introdução

O que causa perplexidade, indaga, interroga... movimenta-nos ao encontro do conhecer. Do movimento de ser professora de Matemática e conhecer alguns modos de ensiná-la no contexto educacional (escolar), emergiu o tema deste estudo, “o ensino da divisão”, o qual vinha se mostrando, entre outros, o mais inquietante na sua experiência docente.

Apesar de existirem trabalhos discutindo o ensino e a aprendizagem da divisão, entendemos que não se esgotaram, pois nos deparamos com muitos professores preocupados com tal conhecimento, ou com falta dele. Aqui nos referimos aos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, que na maioria das vezes são formados em Pedagogia, e aos que são formados em uma Licenciatura em Matemática.

Estes dois grupos de professores, por vezes, mergulhados no discurso da “falta de base” em que frequentemente se colocam como vitimados, sugerindo a culpabilização de alguém frente ao baixo rendimento dos alunos advindos de anos anteriores de escolaridade, trazem-nos questionamentos ainda mais pertinentes sobre os modos de ensinar a divisão. Assim, buscamos por compreensões sobre estes modos que transcorrem nos anos iniciais.

Perseguindo a interrogação orientadora “O que é isto: o ensino de divisão nos anos iniciais?”, percorremos um caminho que mais se mostrou frente ao leque de possibilidades

¹ Universidade Federal do Paraná, e-mail: simdanielle@gmail.com, orientador: Dr. Luciane Ferreira Mocosky.

aberto para tal entendimento. Assim, fomos ao encontro do professor que ensina nos anos iniciais para conhecer como ele (a) compreende esse ensino. Entendendo que a compreensão solicitava outros estudos para que o “fenômeno” ensino-da-divisão-nos-anos-iniciais, pudesse ser melhor explicitado, buscamos:

- Pelos modos de entender a divisão através do tempo, trazidos historicamente pela literatura existente.
- Pelas discussões de pesquisadores que se dedicam ao tema.

Por ora, apresentamos uma síntese do estudo que revela registros históricos sobre a divisão.

Modos de dividir através do tempo

A busca por compreensões sobre a divisão, mais precisamente sobre seu ensino, requer compreender esta operação e o que está subjacente a ela. Um caminho possível que encontramos em direção a este entendimento, foi o de percorrer a linha do tempo do Ensino da Matemática expostos por pesquisadores que estudam o tema. Assim, fomos ao encontro da história, que além de trazer os modos pelos quais realizava - se a divisão, ressalta a importância da ação do homem na constituição do conhecimento. Assim, como D’Ambrósio (2007):

Consideramos importante que o [...] professor entenda a evolução da matemática como parte de um processo sócio - cultural, entendendo como a matemática está ligada à cultura humana. Para que a matemática escolar seja compreendida como resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele, o ensino da matemática nas escolas teria que enfatizar a natureza contextual da disciplina. Para propiciar aos seus alunos experiências de natureza contextual, o professor deve entender a evolução da matemática dessa maneira. (D’Ambrósio, 2007, p.400)

O apontamento de aspectos históricos, de modo algum tem a intenção de dominar o tempo considerando a evolução do conhecimento sobre a divisão. O que oferecemos são ideias sobre os modos de dividir que estariam registrados de alguma forma na literatura que encontramos.

Assim, lançamo-nos ao encontro desse entendimento em outros tempos, buscando uma organização cronológica do desenvolvimento da Aritmética e mergulhados nesta linha do tempo, desde os anos mais remotos antes de Cristo até o período da escola primária no Brasil, em que a maioria das depoentes desta investigação tiveram sua formação elementar, tentamos compreender que caminhos o ensino da divisão percorreu.

Intencionamos que este apanhado histórico contribua para o estabelecimento de relações entre a matemática culturalmente desenvolvida e as formas de tratá-las em práticas pedagógicas.

Reunindo e resumindo

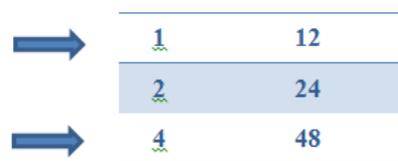
Os papiros egípcios e as tábuas mesopotâmicas

Tanto os papiros egípcios, como o de Rhind, e algumas tábuas de argila dos mesopotâmicos, apresentam registros de divisão, o que demonstra ser um conhecimento presente no cotidiano desses povos há mais de 2000 anos a.C.

A aritmética dos egípcios era predominantemente aditiva, a multiplicação era realizada por “duplicações” sucessivas e a divisão passava a ser o mesmo processo, porém com sentido invertido.

Para maior compreensão, observemos o exemplo da divisão $60 : 12$

Primeiramente, organiza-se uma tabela de duplicações considerando o divisor da divisão:



1	12
2	24
4	48

Fonte: o autor

Considera-se, neste exemplo que, se $1 \times 12 = 12$, então, $12 : 12 = 1$; $2 \times 12 = 24$, então, $24 : 12 = 2$; $4 \times 12 = 48$, então, $48 : 12 = 4$; e assim por diante... a operação, $60 : 12$, é necessário procurar “quantos 12” cabem no 60, para isso soma-se os números da segunda coluna até que o resultado de tal soma seja 60. Como localizam as setas, $48 + 12 = 60$ e seus respectivos quocientes $4 + 1 = 5$, logo, o resultado da divisão de $60 : 12 = 5$.

Já os mesopotâmicos faziam uso das tábuas de multiplicação, feitas em placas de barro, onde para operar com a divisão, usavam os inversos multiplicativos. Mesmo tendo conhecimento de que o sistema de numeração desse povo era de base sexagesimal, usaremos o sistema de base decimal para ilustrar o processo utilizado por eles.

Aqui tratamos da divisão $36 : 5$. Usando o mesmo modo pelo qual operamos a divisão de frações utilizando o inverso, podemos escrever $36 \times 1/5$. Porém sabemos que $1/5$ na forma

de fração decimal é $2/10$, então efetuamos $36 \times 2 = 72$ e revendo a casa decimal de $2/10$, obtemos 7,2.

Os elementos

Na obra “Os Elementos”, datada por volta de 300 a.C., Euclides escreveu 13 livros. Nosso interesse é pelo livro VII que apresenta a teoria dos números, ali estão desenvolvidos os conceitos de divisibilidade, número primo, máximo divisor comum, entre outros.

Nas primeiras proposições apresentadas no livro, se desenvolve geometricamente o conceito de máximo divisor comum, o MDC e a partir daí, constituiu-se o que conhecemos hoje como o “algoritmo euclidiano”, que consiste em um método para encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros e diferentes de zero. Como tal algoritmo é embasado em subtrações sucessivas, entendemos que mesmo não explicitamente, se desenvolveram aí processos de se operar com divisão. Interpretando essas primeiras proposições, percebemos que se estabelece a relação de que é possível sempre dividir um número b por um número a , de forma que:

a e b sejam dois números naturais com $0 < a < b$, sendo $a \neq 0$ e que desta divisão, através de contínuas subtrações de a em b , resulta dois números naturais únicos q e r , tais que q é a quantidade de vezes que a é subtraído de b de modo que sobra um número r menor que a .

Ou seja,

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } r < a$$

Tal relação é expressa hoje, como relação fundamental da divisão. Numa linguagem atual, $D = d \cdot q + r$, em que D é o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto, é o que chamamos por divisão euclidiana. É notável que a aplicação da relação favorece o aparecimento de um procedimento para operar, um algoritmo. Aqui de subtrações sucessivas entre dois números até que o resultado dessas subtrações seja menor que o divisor.

Tal relação apresentada nos escritos de Euclides é usada hoje como verificação (dito prova real) de divisões depois de efetuado o algoritmo usual.

Em síntese cogitamos por interpretações que nessa época se faziam divisões por subtrações sucessivas.

Lilavati

No início do século XII, o matemático hindu Bhaskarachaya, também chamado Bhaskara II escreveu o “*Lilavati*”, o texto apresentado em versos e poesia, trata de Aritmética. Nele, encontra-se um processo de divisão que mais tarde foi apresentado por Fibonacci com o nome de “*per repiego*” que consistia em dividir o dividendo pelos fatores do divisor (Nogueira, 2015).

Um exemplo do método “*per repiego*” é divisão de $1540 : 35$, onde o dividendo 1540 pode ser dividido pelos fatores de 35: 5 e 7. Assim divide-se 1540 por 5, e o quociente desta divisão divide-se pelo outro fator 7.

Ou seja,

$$1540 : 5 = 308 \text{ e } 308 : 7 = 44, \text{ ou seja, } 1540 : 35 = 44.$$

O ábaco

Embora não tenha sido manuseado somente na Idade Média, o ábaco se mostra em várias referências (EVES, 1995, BOYER, 2012) como o principal instrumento auxiliar de cálculo. Ele foi usado por séculos para efetuar operações matemáticas, já que os algoritmos ou cálculo escritos, ainda não eram conhecidos.

Para se efetuarem as divisões, decorria-se a partilha igual em cada ordem. Utilizando as trocas até chegar até a menor ordem.



Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81baco>.

Acesso em 17 set 2016

Ao mesmo tempo em que o conhecimento matemático foi se sofisticando, dando espaço para novos entendimentos e demonstrações, a Matemática usada no cotidiano como nas relações comerciais, na agricultura e no trabalho se encontrava na posse de “especialistas” em procedimentos de cálculo, os abacistas.

Aritmética de Treviso

No início da Idade Moderna, graças a invenção da imprensa, foi publicada na Itália a primeira obra sobre Aritmética, a “*Aritmética de Treviso*”², porém de autor desconhecido. A obra trata da aritmética comercial e expõe conhecimentos relevantes ao exercício dos negócios, principalmente em Treviso e Veneza. Por ser escrita em dialeto usual foi muito importante para minimizar o controle das classes dominantes em relação as transações comerciais da época.

A *Aritmética de Treviso* foi usada nas escolas de cálculo, principalmente para jovens com idade entre 12 e 16 anos, filhos de funcionários públicos e mercadores. Esta obra, que intencionava a habilidade do cálculo para fins comerciais, traz um estudo dos números hindus e também um estudo sobre as operações, entre elas, a divisão.

A mais antiga aritmética impressa é anônima e hoje extremamente rara. A *Aritmética de Treviso*, publicada em 1478 na cidade de Treviso, localizada no caminho que liga Veneza ao norte. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os “algoritmos” iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental. (EVES, 1995, p.299)

O método de divisão apresentado em *Treviso* sustenta - se nas colunas de multiplicação.

Colunas de multiplicação

2	fa	2	fa	4
2	fa	3	fa	6
2	fa	4	fa	8
2	fa	5	fa	10
2	fa	6	fa	12
2	fa	7	fa	14
2	fa	8	fa	16
2	fa	9	fa	18
2	fa	0	fa	0

Fonte: *Aritmética de Treviso*, 1478

Um exemplo do processo de divisão extraído da obra *Aritmética de Treviso* de 1478. “*Larte de labbacho*” pode ser vista a seguir. “**Parti. 825 per .2.**”

² A *Aritmética de Treviso* que usamos nesse texto, é intitulada “*Larte de labbacho*” a qual não apresenta paginação.

$$\begin{array}{r} 825 \overline{)4} \\ 2 \end{array}$$

Passo 1

$$\begin{array}{r} 825 \overline{)41} \\ 22 \end{array}$$

Passo 2

$$\begin{array}{r} 825 \overline{)412} \\ 222 \end{array}$$

Passo 3

$$\begin{array}{r} 825 \overline{)412} \\ 222 \end{array}$$

Passo 4

Portanto,

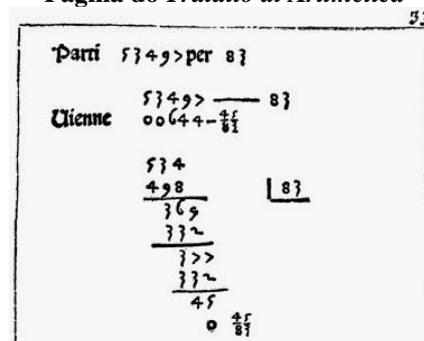
<i>Lo partitore</i> .2.	825
<i>l'auanzo</i>	
<i>La parte</i>	412

Onde *Lo partitore* divisor, *La parte* a parte e *Lauanzo*³ o restante.

Tratatto di Aritmetica

Outras Aritméticas menos notáveis foram publicadas, mas em especial nos chamou a atenção, a “*Tratatto di Aritmetica*”, de Filippo Calandri, que apresenta o primeiro exemplo impresso de um algoritmo de divisão (EVES, 1995).

Página do *Tratatto di Aritmetica*



The image shows a handwritten page from the 'Trattatto di Aritmetica' by Filippo Calandri. It displays a long division problem: 825 divided by 412. The text is written in an old Italian script. The division is shown as follows: 825 is divided by 412, resulting in a quotient of 2 and a remainder of 412. The handwritten text includes 'Parti 825 per 412' and 'Uenue 00644-1/2'. The final result is shown as 2 with a remainder of 412.

Disponível em <http://cienciagaragem.blogspot.com.br/2015/03/a-divisao.html>

Acesso em 02 out 2016

Summa de Arithmetica

Outra aritmética a qual nos retrataremos é a “*Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*”, escrita pelo monge italiano Luca Pacioli em 1494.

Embora sua notabilidade seja na área de contabilidade, por sua aptidão para os cálculos, Pacioli trás na sua aritmética algoritmos para as operações fundamentais.

³No livro, Capitalismo e Aritmética de Frank Swetz o termo *lauanzo* aparentemente evoluiu de *l'avenzo*, ou seja, um excedente, ou em um contexto de negócios, um lucro."http://www.pballew.net/arithme1.html

Pacioli, declarando a complexidade do estudo sobre divisão daquela época, citou a expressão: “[...] se um homem pode dividir bem, todo o resto é fácil, tudo o mais a envolve”. Tal declaração enfatiza a complexidade de tal estudo à época. (SMITH, 1953, p.132 apud SILVA, 2016, p.45). Sobre isto, Adam Riese⁴, no século XVI, afirma ser a divisão um conteúdo estudado apenas nas universidades, e vários cientistas da época não sabiam dividir.

Encontramos no trabalho de Pacioli (1494) o seguinte procedimento:

Ilustração de Pacioli

divisor	dividendo
987654321	1197530864
4239506172	2847901234
4569580246	1913916046
4382783209	

Summa de Arithmetica, 1523

Método do galeão

Conforme Eves (1995, p.323), o algoritmo mais usado para dividir até o século XVI era o método do galeão, galera ou método das riscas. Sua popularidade decorria do fato de poder ser usado, sem dificuldades, com o ábaco de areia; neste caso o processo de riscar consiste efetivamente em apagar e, se for o caso, fazer uma substituição.

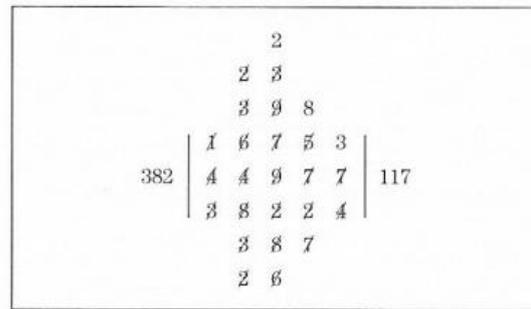
Tal procedimento de dividir, também citado na *Aritmética de Treviso* (1478) quanto na *Summa de Pacioli* (1523), recebe este nome pela semelhança na forma da operação com uma embarcação chamada por esse nome, para EVES (1995)

[...] O nome *galera* refere-se a uma embarcação com cuja forma achava-se que o aspecto final do processo se parecia. Com efeito, olhando-se o trabalho a partir do fundo da página o quociente se parece com um gupês; e olhando-se a partir do lado esquerdo ele se parece com um mastro. [...] (EVES, 1995, p.342)

Para ilustrar o método Boyer (2012, p.157 - 158) usa o exemplo da divisão de 44977 por 382:

⁴ Adam Riese ou Ries, foi um matemático alemão foi conhecido no século XVI por um dos pioneiros a descrever as operações aritméticas.

$$\begin{array}{r}
 117 \\
 382 \overline{)44977} \\
 \underline{382} \\
 677 \\
 \underline{382} \\
 2957 \\
 \underline{2674} \\
 283
 \end{array}$$



(Boyer, 2012, p. 157-158)

Arithmetic, oral and written, practically applied

A obra de Thomas Palmer, intitulada “*Arithmetic, oral and written, practically applied*”, publicada nos Estados Unidos em 1854, expõe um manual para professores que se divide em duas partes: a primeira “*Oral Arithmetic*”, apresenta lições pequenas consideradas muito simples e que deveriam ser repetidas pelos alunos até que decorassem e a segunda parte intitulada “*Written Arithmetics*”, uma pergunta era geralmente respondida por um aluno e outras vezes a resposta era dada. O próprio nome do livro “*Arithmetic, oral and written*”, indica a presença da intenção pedagógica do treino oral, ou seja, de lição que deve recitada, o que mostra o “decorar” como encaminhamento de ensino.

1. Name the quotients of the following numbers [to be repeated as a daily exercise till the quotiens can be given correctly at a glance, without naming the divisors or dividends]:
4:2; 8:2; 6:2; 12:2; 18:2;10:2;... (PALMER, 1854, p.167)

O livro apresenta processos para as quatro operações e a seção IV trata exclusivamente de divisão. Os encaminhamentos apresentados são separados em: divisão quando o divisor não excede 12 (em que é empregado um processo chamado de curto) e quando o divisor excede o 12 (onde é empregado o processo chamado longo).

Exemplo de Short Division

Divide 63543 by 4.

Divisor, 4)63543 Dividend.

Quotient, 15885 “ 3 undivided remainder.

Divisor, 4

Proof,

63543

Palmer (1854), p.168

Para desenvolver esta operação são sugeridas perguntas como: “Quantos 4 cabem no 6 da quinta ordem (classe das unidades de milhar)?”

No processo chamado de longo para divisores maiores que 12, são apresentados três métodos, “*The Long Method*”, “*Contracted Method by omitting unnecessary*” e “*Abridged Method, by performing the Subtraction mentally*”.

<i>a. The Long Method.</i>		<i>b. Contracted Method, by omitting unnecessary ciphers.</i>	
Dividend,	64235 (24 Divisor.	Dividend,	64235 (24 Divisor.
1st partial product,	48000 $\overline{2000}$	1st partial product,	48 $\overline{2676\frac{3}{4}}$ Quotient.
	600		
1st remainder,	16235 $\left. \begin{array}{l} 600 \\ 70 \\ 6 \end{array} \right\}$ Partial Quotients.	1st remainder,	162 64235 Proof 1, viz., divisor \times quo-
2d partial product,	14400 $\left. \begin{array}{l} 6 \\ 6 \end{array} \right\}$	2d partial product,	144 [tient $-$ remainder.
2d remainder,	1835 $\overline{2676\frac{3}{4}}$ Total Quotient.	2d remainder,	183
3d partial product,	1680 $\overline{24}$ Divisor.	3d partial product,	168
3d remainder,	155 64235 Proof 1, viz. divisor \times quot.	3d remainder,	155
4th partial product,	144 $\left[\begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right]$ remainder.	4th partial product,	144
Undivided rem'r,	11	Undivided remainder,	11
Proof 2,	64235 Sum of products and last remainder.	Proof 2,	64235 Sum of products and last remainder.
			15

c. Abridged Method, by performing the Subtraction mentally.

Dividend,	64235 (24 Divisor.		
Partial dividends formed of	$\left\{ \begin{array}{l} 162 \\ 183 \end{array} \right\}$	$\overline{2676\frac{3}{4}}$	Quotient.
remainders and one figure			
from general dividend,	$\left\{ \begin{array}{l} 155 \\ 11 \end{array} \right\}$	$\overline{64235}$	Proof.
			11 undivided remainder.

Palmer, 1854, p.169-170

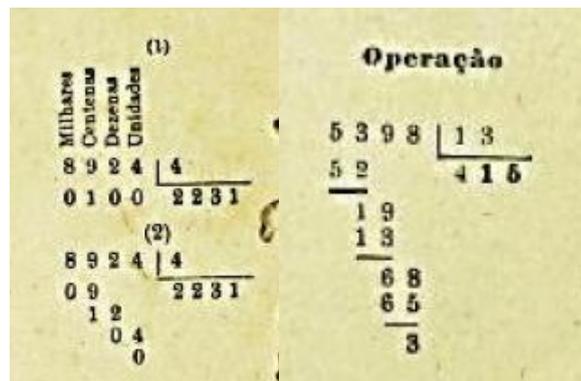
Ainda ao final do texto sobre divisão de inteiros, há um exemplo de como usar uma tabela de multiplicações onde um fator é o divisor, com ressalvas de que “ajudas desse tipo devem ser usadas raramente”.

<table style="width: 100%;"> <tr><td>235 • 2 =</td><td>470</td></tr> <tr><td>• 3 =</td><td>705</td></tr> <tr><td>• 4 =</td><td>940</td></tr> <tr><td>• 5 =</td><td>1175</td></tr> <tr><td>• 6 =</td><td>1410</td></tr> <tr><td>• 7 =</td><td>1645</td></tr> <tr><td>• 8 =</td><td>1880</td></tr> <tr><td>• 9 =</td><td>2115</td></tr> </table>	235 • 2 =	470	• 3 =	705	• 4 =	940	• 5 =	1175	• 6 =	1410	• 7 =	1645	• 8 =	1880	• 9 =	2115	<table style="width: 100%;"> <tr><td style="text-align: center;">Dividend.</td><td></td></tr> <tr><td>59469805 (235 Divisor factor.</td><td></td></tr> <tr><td>470 $\overline{253063}$ Quotient factor.</td><td></td></tr> <tr><td>1246 59469805 Proof.</td><td></td></tr> <tr><td>1175</td><td></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">719</td><td></td></tr> <tr><td>705</td><td></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">1480</td><td></td></tr> <tr><td>1410</td><td></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">705</td><td></td></tr> <tr><td>705</td><td></td></tr> <tr><td style="border-top: 1px solid black;">—</td><td></td></tr> </table>	Dividend.		59469805 (235 Divisor factor.		470 $\overline{253063}$ Quotient factor.		1246 59469805 Proof.		1175		719		705		1480		1410		705		705		—	
235 • 2 =	470																																								
• 3 =	705																																								
• 4 =	940																																								
• 5 =	1175																																								
• 6 =	1410																																								
• 7 =	1645																																								
• 8 =	1880																																								
• 9 =	2115																																								
Dividend.																																									
59469805 (235 Divisor factor.																																									
470 $\overline{253063}$ Quotient factor.																																									
1246 59469805 Proof.																																									
1175																																									
719																																									
705																																									
1480																																									
1410																																									
705																																									
705																																									
—																																									

Palmer, 1854, p.170

Tendo sua primeira edição em 1879, a Aritmética de Trajano foi destinada ao ensino primário no Brasil e considerada um dos primeiros livros didáticos pela forma como foi escrito.

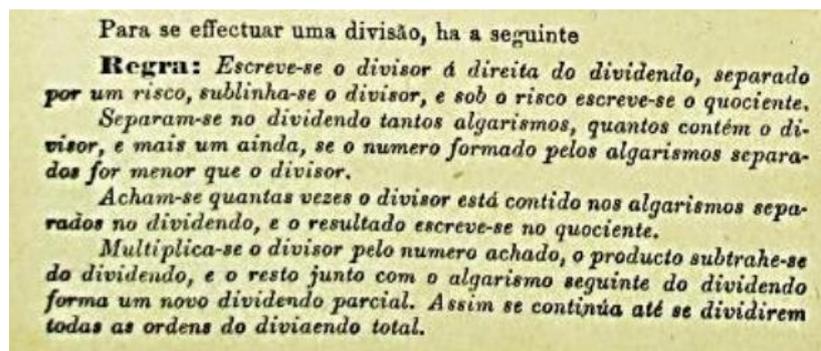
O capítulo destinado ao ensino da divisão começa com a apresentação de uma tabuada de divisão e, na sequência exemplos de como dividir.



Trajano, sd, p.34-36

Observando os outros exemplos do algoritmo da divisão, percebemos que o livro traz o “método breve” para divisão em que o divisor é um número com um algarismo e o “método longo” para divisões com divisores de mais de dois algarismos. Também cabe-nos ressaltar que ao final da lição apresenta-se uma regra para seguir o algoritmo.

Regra para operar a divisão



Arithmética Elementar Ilustrada – Antonio Bandeira Trajano, 1878, p.36

Conclusão

Neste texto trouxemos alguns registros históricos que destacam o modo como a divisão vem sendo realizada ao longo do tempo.

Conhecer “o que” e “como” os procedimentos e as ideias subjacentes pode favorecer a compreensão do ensino na atualidade, principalmente por entendermos de onde pode ter vindo o que recebemos como herança didático-pedagógica.

REFERÊNCIAS

Anônimo, **Larte de labbaco** (Arithmetica di Treviso), 1478. Disponível em <http://cienciadegaragem.blogspot.com.br/2015/05/livros-renascentistas.html>.

Acesso em: 18 jul 2016.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

D'AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Especial nº 1, p.399-406, dez. 2007. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20Festschrift/33%20-%20Beatriz%20-%20final.pdf> Acesso em 08 mar 2016.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995.

NOGUEIRA, R.R.B. **Matemática uma abordagem histórica**. vol II, 1ª edição. 2015.

Disponível em: <http://cienciadegaragem.blogspot.com.br/2015/10/matematica-volume-2-ebook-gratuito-em.html> Acesso em 18 jul 2016.

PALMER, T. H. **Arithmetic, oral e written, practilly applied by means suggestive questions**. Boston: 1854. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=mWQE1_mhbcEC&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:+%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+projec+t%22&lr=&hl=pt-BR&source=gbs_slider_thumb&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true

Acesso em 26 jul 2016.

SILVA, A. O. **Sistemas numéricos e operações aritméticas**. 60f. Dissertação de Mestrado Universidade Severino Souza. Vassouras, 2016.

TRAJANO, A. **Arithmetica elementar illustrada**. 68ª ed. Rio de Janeiro: Typ. de Martins de Araujo & C. sd. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104081> Acesso em: 09 set 2016.